Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 530.182:524.8(043) На правах рукописи

БАУЫРЖАН ГҮЛЬНУР БАУЫРЖАНКЫЗЫ

Методы многообразия и подмногообразия в нелинейных моделях обобщённых теорий гравитации

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор
Р. Мырзакулов

Зарубежный научный руководитель
доктор PhD,
профессор
Д. Синглетон

Республика Казахстан
Астана, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ..... 3
ВВЕДЕНИЕ..... 4
1 ИНФЛЯЦИЯ ПО СИММЕТРИИ ОБОБЩЕННОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ……. 10
1.1 F (R, T, X, φ) гравитация……. 11
1.2 Подход к симметриям Нетер……. 16
1.3 Решение симметрии Нетер……. 20
1.4 Представление Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера…..... 23
Выводы по первому разделу……. 37
2 ОБОБЩЕННЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ F (R, T) и F(R,Q)…… 38
2.1 Гравитация F (R, T) с фермионными полями……... 38
2.2 Уравнения Эйлера-Лагранжа……. 40
2.3 Симметрия Нетер……. 41
2.4 Обобщенные модели гравитации F (R, Q) ……... 43
Выводы по второму разделу……. 55
3 СОЛИТОННАЯ ГЕОМЕТРИЯ…..…… 56
3.1 Фундаментальные формы уравнения Кортевега-де Фриза……. 57
3.2 Системы Манакова для солитонных поверхностей……. 66
3.3 Геометрия солитона с использованием представления Лакса для изомонодромной деформации…….. 72
Выводы по третьему разделу……... 79
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……... 80
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ……. 82

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ОТО	- общая теория относительности
МА	- Монжа - Ампера
H	- постоянная Хаббла
ФЛРУ	- Фридман–Леметр–Робертсон–Уокер
КдВ	- Кортевега−де Фриза
R	- скаляр кривизны
T	- скаляр кручения
Q	- скаляр неметричности
cmКдВ	- модифицированный Кортевега−де Фриза

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача физики — разработка общих универсальных законов природы. В частности, для описания Вселенной необходимо разработать космологическую модель, которая описывала бы все известные факты. Так, понятие «k-эссенции» было введено как динамическое решение для естественного объяснения того, почему Вселенная сейчас находится в стадии ускоренного расширения. Нет возникает необходимости в тонкой настройке параметров. Это понятие также может быть применено к проблеме хаббловского натяжения. Важным является рассмотреть инфляционную модель k-эссенции в рамках обобщенной модели гравитации. Это важно, поскольку, с одной стороны, обобщенная теория гравитации должна включать гравитацию Эйнштейна. С другой стороны, модель должна описывать формирование крупномасштабной структуры Вселенной, что возможно в рамках обобщения F(R) гравитации. Здесь гравитация описывается в рамках связности Леви-Чивиты на римановом многообразии. То есть это обобщение подразумевает нулевое кручение и неметричность. На самом деле, это лишь частный случай. Например, еще одним частным случаем является телепараллельный эквивалент общей теории относительности, которая уже использует связность Вейценбека, но без учета кривизны и неметричности. Ее обобщением будет рассмотренная нами гравитация F(T). Важно, что мы рассмотрели не только модели гравитации F(R) и F(T), но и модель F(R,T). Здесь рассматривалась третья возможность — учитывать оба вида связанности в многообразии.

Но кроме кривизны и кручения есть еще одна формулировка, основанная на неметричности Q для описания гравитационных эффектов, расширяющих общую теорию относительности. Первые работы появились не так давно, где рассматривались теории F(Q). Разумеется, и здесь возможно обобщение, которое неминимально связано со скаляром неметричности Q и скаляром кривизны R. Неминимальные связи здесь возникают естественным образом, когда квантовые эффекты для минимального скаляра рассматриваются в ОТО и используются, например, в инфляции Хиггса. То есть желательно рассматривать модель в наиболее общем виде F(R,Q) где скалярное поле не минимально связано с кривизной и неметричностью, как многообразие, для которого например риманово многообразие является подмногообразием.

Таким образом использование методов многообразий и подмногообразий в обобщённых теориях гравитации позволяет расширить геометрический анализ пространства-времени, изучая свойства моделей в условиях кривых многообразий и высоких размерностей. Многообразия предоставляют базовую геометрическую структуру, которая позволяет рассматривать пространство-время как гладкую многообразную структуру с различными типами симметрий. Подмногообразия же позволяют анализировать локальные свойства модели, рассматривая различные виды субпространств, обладающих особыми свойствами, например, устойчивостью или симметрией.

Подход с использованием подмногообразий, таких как пространства нулевой кривизны или пространства постоянной кривизны, позволяет анализировать поведение космологических параметров в зависимости от геометрии. Такие методы применяются для понимания топологических особенностей, влияющих на стабильность и динамику материи и энергии, что особенно важно.

Совмещение метода Нётер с многообразиями и подмногообразиями предоставляет новый уровень анализа космологических моделей. Законы сохранения, выводимые через метод Нётер, можно проинтерпретировать в терминах многообразий, что даёт возможность рассматривать решения на основе локальных и глобальных симметрий, возникающих в сложных структурах пространства-времени.

Настоящая работа посвящена исследованию обобщенной космологической моделей $F(R,T,X,\varphi)$ и $F(R,Q,X,\varphi)$ и их частных случаев методами дифференциальной геометрии. Показано что симметрия модели определяет ее инфляционный характер.

Актуальность темы диссертации

Постоянно появляющиеся новые космологические данные, приводит к пониманию необходимости уточнения общей теории относительности. В частности, есть необходимость определения причины ускоренного расширения Вселенной в начальный период и в наше время. В частности, имеющееся ускоренное расширение описывает модель с k-эссенцией. Первоначальная же инфляция в частности хорошо описывается космологической моделью с F(R)-гравитацией. В качестве частного случая она включает модель гравитации с квадратным членом скаляра Риччи R, которую можно рассматривать как обобщение общей теории относительности, описывающей инфляцию Старобинского. Минусом этой модели является вопрос о причине существования космологической модели именно в таком виде, приводящем к первоначальной инфляции. Ответить на этот вопрос можно рассматривая модель в наиболее общей форме методами теории симметрий в рамках дифференциальной геометрии.

Исследования многообразий сами по себе имеют высокую актуальность в математике и физике благодаря их фундаментальной роли в моделировании сложных пространственно-временных структур и физических процессов. Важность многообразий подтверждается их применением в различных областях науки, где они формируют основу для точного математического описания физических явлений, таких как гравитация, квантовая механика и других. В настоящее время актуальность этих исследований подкрепляется значительным числом успешных теоретических и экспериментальных подтверждений, а также многими приложениями в прикладных науках и инженерных задачах.

Решения подобных задач обычно сводятся к решения нелинейных дифференциальных уравнений. Важным разделом решений подобных уравнений в рамках поставленных задач являются солитонные решения нелинейных уравнений, описываемых на многообразиях. Солитоны, описываемые уравнениями, такими как уравнение Кортевега-де Фриза, устойчиво

наблюдаются в нелинейных оптических системах, гидродинамике и физике плазмы, что подтверждает научную достоверность моделей, основанных на многообразиях. Помимо этого, солитоны применяются и в космологии. Космологические солитоны, также называемые топологическими дефектами, играют важную роль в теоретических моделях, описывающих крупномасштабные структуры, формирование галактик, а также взаимодействие и эволюцию материи и полей во Вселенной. Солитоны представляют собой уникальные нелинейные волновые структуры, которые сохраняют свою форму и энергию при распространении и взаимодействии, что делает их значимыми для разнообразных приложений в физике, инженерии и математике. Научная важность и актуальность солитонов заключается в их способности моделировать устойчивые волновые процессы в различных нелинейных средах.

Целью работы является теоретическое исследование уравнения второго порядка Монжа-Ампера, описывающую свойства его решения, также используется методы дифференциальной геометрии, а именно:

1. Найти вид функции Лагранжа для F(R,T,X,φ), F(R,X,φ), F(T,X, φ) и F(R,Q,X,φ) космологических моделей методами теории Нетер.
2. Рассмотреть свойства уравнения Монжа-Ампера методами дифференциальной геометрии, и найти его решение для случая постоянной кривизны поверхности.
3. Сравнить получаемую модель с астрономическими наблюдательными данными.

Задачи исследования:

1. Найти решение для функции Лагранжа для обобщённых космологических F(R,X,T, φ), F(R,Q,X, φ), F(T,X, φ) и F(R,X, φ) моделей методом теории Нетер.
2. Найти решения уравнения Монжа-Ампера с заданной симметрией с помощью представление Лакса.
3. Апробировать полученное решение функции Лагранжа для получения космологических параметров модели и сравнения их с наблюдательными данными.

Научная новизна и значимость диссертационной работы

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Показано что инфляционная модель является результатом симметрии обобщенных космологических моделей F(R,T,X,φ) и F(R,Q,X,φ) с к эссенцией. Найдено что частным случаем решения является космологическая модель Старобинского.
2. Показано, что космологические модели F(R,X,φ), F(Q,X,φ) и F(T,X,φ) так же имеют решение в виде решения уравнения Монжа-Ампера, одно из решений которого включает модель Старобинского. При этом модель F(R,T,φ) с скалярным полем не имеет такого решения.
3. Показано что решение для рассматриваемых моделей может иметь солитонный характер.

4. Показано что параметры рассматриваемой F(R,X,φ) модели для космологии медленного скатывания соответствуют наблюдательным данным.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Решение уравнений поля для обобщенных F(R,T,X,φ) и F(R,Q,X,φ) космологических моделей и их частных случаев F(R,X,φ), F(T,X,φ) и F(Q,X,φ) в виде решения уравнения Монжа-Ампера является аналогом модели Старобинского, описывающий инфляцию начальный эпохи расширения Вселенной.
2. Представление Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера второго порядка, показывает интегрируемость полученной модели в рамках теории солитонов.
3. Постоянный косинус координатного угла, описывающий квадратное решение уравнения Монжа-Ампера, показывает соответствие параметров с наблюдательными данными.

Предмет исследования:

Влияние симметрии на инфляционный характер эволюции Вселенной в обобщенных космологических моделях с к-эссенцией.

Методы исследования:

Были использованы методы дифференциальной геометрии, теории Нетер и представления Лакса.

Для нахождения лагранжиана модели был использован метод теории Нётер для выявления законов сохранения. Интегрируемость уравнения Монжа-Ампера было показано через представление Лакса. Применены также метод Сима-Тафеля и спектральная деформация для связи геометрии и солитонов, что позволило описать солитонные поверхности через фундаментальные формы и кривизну.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа носит теоретический характер. Поэтому научные результаты, полученные по ходу исследования, были опубликованы в открытой печати. Распространение результатов работ среди потенциальных пользователей, сообщества ученых и широкой общественности осуществляется изданием их в виде статей в сборниках конференций, статьи в изданиях РК и зарубежных рецензируемых журналах с ненулевым импакт-фактором. Целевыми потребителями результатов исследования являются ученые проводящие схожие работы в области солитонной поверхности, теории гравитации и других разделах физики и прочих отраслей наук. Наряду с этим, работу можно ввести в виде учебных дисциплин, а также в виде спецкурсов для магистрантов и PhD докторантов в ВУЗ-ах и научных центрах.

Кроме того, результаты диссертационной работы могут быть применены в учебном процессе при чтении элективных курсов бакалаврам, магистрантам и докторантам специальности «Физика».

Личный вклад автора

Основные результаты исследования получены автором. Численные расчеты и графики найдены автором самостоятельно. Публикации по теме

диссертационной работы подготовлены автором лично. Постановка задач, выбор метода исследования и обсуждения результатов работы были проведены совместно с научными консультантами.

Достоверность результатов

Полученные результаты подтверждены публикациями в ведущих научных журналах с высоким импакт-фактором, а также в журналах, рекомендованных Комитетом образования и науки Республики Казахстан. Кроме того, наличие публикаций в сборниках материалов отечественных и зарубежных международных научных конференций еще раз подтверждает достоверность результатов.

Апробация результатов работы:

1. Inflation from the Symmetry of the Generalized Cosmological Model // Symmetry. – 2021. – Vol. 13(12). – P. 2254 (по базе Web of Science IF=2.940, Q2, процентиль 66, по CiteScore в базе Scopus процентиль 72).
2. Soliton geometry using the Lax pair of isomonodromic deformation // News of NAS RK. Series Physico – mathematical. – 2021. – Vol. 3(337). – P. 20-25 (входящие в состав ККСОН РК).
3. Решение периодической системы Манакова для солитонных поверхностей // КазНПУ. Хабаршы. Серия «Физика-математические науки». – 2019. – №2(66). – С. 121-126 (входящие в состав ККСОН РК).
4. Термодинамика и геометротермодинамика черных дыр Рейсснера-Нордстрёма в многомерных моделях с степенной зависимостью// Вестник КазНУ.Серия физика. №2(66). Алматы,2021.с.18-28.
5. Generalized F(R, T) cosmological models with fermionic fields // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2090. – P. 012063.
6. Soliton surface for complex modified Korteweg – de Vries equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1391. – P. 012108.
7. Investigation of a soliton surface by the methods of the Gauss equation // Proceedings of the IV International Conference «Astrophysics, gravity and cosmology» (Nur-Sultan, 2019. – P. 32-36).
8. Generalized F(R,X,φ) cosmology // Сборник материалов XIX Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Gylym Jane Bilim-2024» (Астана, 2024. – С. 246-249).
9. Study of the cosmological model by methods of the F(R, X, φ) symmetry theory // Сборник материалов XIX Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Gylym jane bilim-2024» (Астана, 2024. – С. 299-302).

Опубликованность результатов

По результатам диссертационной работы было опубликовано 9 статей, в том числе 1 публикация в журнале Q1, процентиль 66, входящего в Web of Science и по CiteScore в базе Scopus процентиль 88, и 3 публикации входящие в состав ККСОН РК, 5 статей и тезисов в материалах международных и республиканских конференциях.

H-индекс и цитируемость работ. Докторант Бауыржан Г.Б имеет следующие наукометрические показатели по базе данных в Web of Science H-index – 1 и Scopus H-index - 1.

Связь темы диссертации с планами научных работ

Работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ по проекту –«Исследование уравнения Монжа-Ампера геометрическими методами теории солитонов и его применение к решению физических задач»

Годы реализации проекта - 17.05.2023-31.12.2025. ИРН проекта AP19175860.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех разделов, заключения и списка использованных источников. Работа изложена на 87 страницах, содержит 8 рисунков, приведено 460 формул, список использованных источников 97 наименований.

1 ИНФЛЯЦИЯ ПО СИММЕТРИИ ОБОБЩЕННОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

F(R,T,X,ϕ) – космологическая модель, которую можно рассмотреть используюя симметрию Нетер. Показано, что даже в более частных случаях космологических моделей F(R,X,ϕ) и F(T,X,ϕ) все равно получается уравнение Монжа–Ампера, одно из решений которого включает модель Старобинского. Для этих моделей показано, что из уравнений Эйлера-Лагранжа можно получить как степенные, так и экспоненциальные решения для масштабного фактора. В этом случае скалярное поле ϕ имеет сходные зависимости от времени, экспоненциальные и непрямоугольные. Результирующая форма лагранжиана модели позволяет рассматривать ее как модель с R^2 или X^2. Однако также показано, что ранее менее изученные модели с неминимальной зависимостью между R и X важны, как одна из возможных моделей. Показано, что в этом случае степенная модель может иметь ограниченный эволюционный период с отрицательным значением кинетического члена.

Постоянно появляющиеся новые космологические данные, с одной стороны, привлекают внимание к обобщенной теории тяготения. Однако, с другой стороны, это приводит к необходимости уточнения общей теории относительности. Это должно помочь определить причины ускоренного расширения Вселенной в начальный период и в наше время Sne Ia [1, 2]. Текущее ускоренное расширение Вселенной может быть описано различными моделями. Простейшей из них является модель общей теории относительности с космологической постоянной Λ. В настоящее время эта модель называется стандартной космологической моделью ΛCDM. Эта модель может описывать текущее состояние Вселенной. Однако существует необходимость включить в описание начальный инфляционный период развития Вселенной. Более сложным вариантом описания является включение в космологическую модель различных полей, таких как скалярное поле φ. Здесь, чтобы обобщить влияние скалярного поля на космологическую модель, мы используем модель k-эссенция с Лагранжевой плотностью в обобщенном виде L = F(φ, X) [3, 4], основанную на модели k-инфляции [5]. Здесь не рассматриваем другие формы полей, такие как тахионное поле, фантомное (призрачное) поле, дилатоническая темная энергия, газ Чаплыгина или обобщение скалярных и фермионных полей g-эссенция [6-8].

Следующим способом, используемым для описания наблюдаемых инфляционных явлений, является F(R)-гравитация. В качестве частного случая она включает модель гравитации с квадратичным членом скаляра Риччи R^2, которую можно рассматривать как обобщение общей теории относительности, описывающее инфляцию Старобинского. В качестве альтернативы этой модели разрабатывается телепараллельная гравитационная модель, которая в обобщенном виде может быть представлена как F(T) [9], где T - скаляр кручения [10, 11]. В качестве обобщения этих двух способов описания Вселенной была использована модель модифицированной теории F (R, T) – гравитация [12, 13]. Здесь лагранжиан является функцией двух переменных, таких как скаляр Риччи

и скаляр кручения [14-16]. В этом разделе, мы попытаемся рассмотреть наиболее обобщенную модель, которая включала бы в произвольном виде F(R,T,X,φ) и скалярное поле в виде k-эссенция. Для рассмотрения этой модели здесь используется симметрия Нетер, где m - материальная часть действия. Для изучения модели мы используем симметрию Нетер. Этот подход широко используется в различных областях физики, включая космологию. Здесь мы рассматриваем модель Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ) с нулевой кривизной. Чтобы упростить рассмотрение, мы рассмотрим модель без материальной части действия, поскольку целью работы является рассмотрение обобщенной модели методами симметрии, для которой влияние материальной части несущественно. Кроме того, для простоты рассмотрим модель в рамках метрики ФЛРУ с нулевой кривизной.

1.1 F(R,T,X,φ) гравитация

Рассмотрим общее многообразие с кривизной и кручением, частью которого будет стандартное риманово многообразие без кручения. В этом многообразии, мы определяем метрику $g_{\mu\nu}$ и метрико-совместимую путевую связь Γ так, чтобы скалярная кривизна R и скаляр кручения T соответствовали динамической связи Γ. В общем случае это соотношение можно записать как [17-19]:

$$\Gamma_{ij}^{h} = L_{ij}^{h} - K_{ij}^{h} + N_{ij}^{h}, \tag{1}$$

где L_{ij}^{h} – связь Леви-Чивиты, связанная с данной метрикой g;

K_{ij}^{h} – обозначает тензор искажения;

N_{ij}^{h} – тензор деформации. Здесь:

$$N_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(Q_{\beta\mu\nu} - Q_{\mu\beta\nu} - Q_{\nu\beta\mu}\right), \tag{2}$$

где

$$\mathrm{Q}_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha}\mathrm{g}_{\mu\nu}, \tag{3}$$

и

$$Q^{\alpha\mu\nu} = -g^{\alpha\beta}\nabla\beta\, g^{\mu\nu}. \tag{4}$$

Здесь мы предполагаем, что

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \tag{5}$$

Здесь мы определяем тензор кручения как:

$$T_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} - \Gamma_{ji}^{h}. \tag{6}$$

Тогда, в терминах тензора кручения, тензор искажения выражается как

$$K_{ij}^{h} = \frac{1}{2}\left(-T_{ij}^{h} + T_{ji}^{h} - T_{ij}^{h}\right), \tag{7}$$

где тензор искажений со свойством антисимметрии $K_{ij}^{h} = -K_{i}^{jh}$. Кривизна Риччи динамической связи имеет вид:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \nabla_j K_{hi}^{h} - \nabla_h K_{ji}^{h} + K_{ji}^{p} K_{hp}^{h} - K_{hi}^{p} K_{jp}^{h}. \tag{8}$$

Следовательно, мы получаем скалярное кручение:

$$R = R_l + u, \tag{9}$$

где функция u имеет вид:

$$u = \widetilde{\nabla}_j K_{h}^{ij} - \widetilde{\nabla}_h K_{j}^{jh} + K_{j}^{jp} K_{hp}^{h} - K_{h}^{jp} K_{jp}^{h}. \tag{10}$$

Здесь R_{ij} и R_l – это кривизна Риччи и скалярная кривизна связи Леви-Чивиты, индуцированная метрикой gμν. Аналогично скаляру кривизны R, теперь мы вводим следующий инвариант, который является скаляром кручения в виде $T = S^{\rho\mu\nu} T\rho\mu\nu$, где

$$S\rho\mu\nu = 0.5\left(K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T_{\sigma}^{\sigma\mu} + g^{\rho\mu} T^{\sigma\nu}\sigma\right). \tag{11}$$

Как скаляр кривизны R, теперь мы можем разложить выражение для скаляра кручения следующим образом:

$$T = Tw + v, \tag{12}$$

где v - некоторая действительная функция, которая должна быть определена как другая функция u. Теперь мы готовы записать действие этой силы тяжести, заданное [10; 11, p. 3; 12, p. 123-5]:

$$S = \frac{1}{2K^2} \int d^4 \sqrt{-g}\, F(R,T) + S_{\text{m}}, \tag{13}$$

где

$$S_m = \int d^4 x \sqrt{-g} L_m, \tag{14}$$

$$R = R_l + u, \tag{15}$$

$$T = T_{\omega} + v, \tag{16}$$

где $k^2 = 8\pi G$; g и Lm – метрический определитель и лагранжиан материи соответственно: $F\ (R,T)$ – произвольная функция скаляра кривизны R и скаляра кручения T.

В приведенных вышеуравнениях

$$u = u\left(x^j, g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \dots\right), \tag{17}$$

$$v = v\left(x^j, g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \dots\right), \tag{18}$$

есть какие-то реальные функции с необходимыми свойствами и их аргументами, $(i,j,k = 0,1,2,3)$.

Мы определяем $|e| \equiv \det\left(e_\mu^i\right) = \sqrt{-g}$, чтобы связать два формализма. Это делается для проверки того, что из MG можно немедленно восстановить значения как $F\ (T)$, так и $F(R)$. Изменение действия дает следующие уравнения поля [14, p. 155009-6]

$$\frac{1}{4}e_A^\mu f(R,T) + e^{-1}\left(ee_A^\sigma S_\sigma^{\mu\nu}\right)\frac{\partial f(R,T)}{\partial T}\partial_\nu + e_{A\nu}[\left(\nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\nabla_\lambda\right)\frac{\partial f(R,T)}{\partial R} -$$

$$-\frac{\partial f(R,T)}{\partial R}R^\mu + e_A^\sigma S_\sigma^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 f(R,T)}{\partial T^2}\partial_\nu T + \frac{\partial^2 f(R,T)}{\partial T\partial R}\partial_\nu R\right) -$$

$$-\frac{\partial f(R,T)}{\partial T}e_A^\gamma S_\sigma^{\rho\beta\mu}T_{\rho\beta\gamma} = 4\pi G e_A^\nu T^{(m)}\nu_\mu. \tag{19}$$

Традиционно космологические модели рассматриваются в рамках метрики FRW. Рассмотрим ее аналогично интервалу $ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Давайте начнем с модели в ее наиболее общем виде как F(R,T,X,φ) - гравитация, действие для которой имеет следующий вид:

$$S = 2\pi^2\int dta^3\left\{F - \lambda_1\left[R - u - 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{a^2}{a}\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\lambda_2\left[T - v + 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right] - \lambda_3\left[X - \frac{1}{2}\phi^2\right]\right\} \tag{20}$$

где a - масштабный фактор.

Как хорошо известно, можно записать уравнения Эйлера–Лагранжа для модели ФЛРУ в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial L}{\partial a}, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial R}, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = \frac{\partial L}{\partial T}, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial X}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \tag{25}$$

с энергетическим условием

$$E_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{T}}\dot{T} + \frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\dot{X} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - L = 0. \tag{26}$$

Здесь

$$R = u + R^{(LC)}, \tag{27}$$

$$T = v + T^{(WC)}. \tag{28}$$

где $R^{(LC)}$ – скаляр кривизны, соответствующий связи Леви-Чивиты с исчезающим кручением, $T^{(w)}$ - скаляр кручения для чисто связи Вейценбека с исчезающей кривизной.

Для ФЛРУ мы можем записать это как

$$R = u + 6(H + 2H), \tag{29}$$

$$T = v - 6H^2, \tag{30}$$

$$X = \frac{1}{2}\phi^2. \tag{31}$$

Из уравнений Эйлера–Лагранжа для $F(R, T, X, \varphi)$ от R, T, и X, мы получаем

$$\lambda_1 = F_R;\ \lambda_2 = F_T;\ \lambda_3 = F_X. \tag{32}$$

Здесь и после обозначения $F(R,T,X,\varphi)$ как F, а F_R, F_T, F_X являются производными функции F по R,T и X соответственно.Интегрируем по частям, и, если учесть, что u, v линейно зависит от $a,\dot{a},\ddot{a}$ и R,T соответственно, то мы можем переписать лагранжиан следующим образом

$$L = a^3[F - b_1(R-u)F_R - b_2(T-v)F_T] - 6a\dot{a}^2[b_1F_R + b_2F_T] - \\ -6a^2\dot{a}\left[\dot{R}F_{RR} + \dot{T}F_{RT} + \dot{X}_{RX} + \dot{\phi}F_{R\phi}\right] - a^3F_X\left[X - \frac{1}{2}\phi^2\right]. \quad (33)$$

Здесь b_1, b_2- некоторые константы, которые мы далее примем за единицу. Аналогичный результат получен для $u(a,\dot{a})$ и $v(a,\dot{a})$. Таким образом, нет большой разницы между u,v, которые линейно зависят от R,T или только от $a,\dot{a}$. Кроме того, мы можем использовать точечный лагранжиан, где u,v - некоторые функции от $a,\dot{a}$. только как

$$L = a^3[F - (R-u)F_R - (T-v)F_T] - 6a\dot{a}^2[F_R + F_T] - \\ -6a^2\dot{a}\left[\dot{R}F_{RR} + \dot{T}F_{RT} + \dot{X}_{RX} + \dot{\phi}F_{R\phi}\right] - a^3F_X\left[X - \frac{1}{2}\phi^2\right]. \quad (34)$$

Для этой наиболее общей формы космологической модели со скалярным полем уравнения Эйлера–Лагранжа будут иметь следующий очень сложный вид:

$$F - AF_R - BF_T - \left(u_{\dot{a}}\frac{a}{3} - 4H\right)F_R - \\ -\left(v_{\dot{a}}\frac{a}{3} - 4H\right)F_T - 2F_R - F_x(X - \tfrac{1}{2}\phi^2) \quad (35)$$

где

$$A = R - u - \frac{a}{3}u_a + u_{\dot{a}}\dot{a} + u_{\dot{a}a}\dot{a}\frac{a}{3} + u_{\dot{a}\dot{a}}\ddot{a}\frac{a}{3} - 4\dot{H} + 6H^2, \quad (36)$$

$$B = R - v - \frac{a}{3}v_a + v_{\dot{a}}\dot{a} + v_{\dot{a}a}\dot{a}\frac{a}{3} + v_{\dot{a}\dot{a}}\ddot{a}\frac{a}{3} - 4\dot{H} - 6H^2. \quad (37)$$

Уравнение Клейна–Гордона здесь имеет вид:

$$F_\phi - 3HF_{x\phi}\dot{\phi} - \left[\dot{R}F_{XR} + \dot{T}F_{XT} + \dot{X}F_{XX} + \dot{\phi}F_{X\phi}\right]\phi - F_X\ddot{\phi} = 0. \quad (38)$$

Энергетическое условие дает:

$$E_L = a^3\left[F_X\left(X + \frac{1}{2}\phi^2\right) - F + F_R(\dot{a}u_a + 6H^2 + R - u) + F_T(\dot{a}v_a - 6H^2 + T - \right. \\ \left. -v) + 6H\left(\dot{R}F_{RR} + \dot{T}F_{RT} + \dot{X}F_{RX} + \dot{\phi}F_{R\phi}\right)\right] = 0. \quad (39)$$

Как видно из этих уравнений, их очень трудно решить в их наиболее общем виде. Чтобы решить это, важно получить аналитическое решение лагранжиана модели.

1.2 Подход к симметриям Нетер

Использование методов симметрии имеет долгую историю в физике. Оно обеспечивает законы сохранения. Таким образом, стандартная модель построена на локальной калибровочной симметрии. Теория Янга–Миллса, используемая для построения Стандартной модели, в частности, использует тождества Славнова–Тейлора–Уорда–Такахаши. Здесь мы используем аналог тождества Уорда–Такахаши - симметрию Нетер. Другими словами, мы можем сказать, что законы сохранения являются проявлениями теоремы Нетер. Согласно этой теореме, для динамической системы с координатами, которая описывается лагранжианом с системой уравнений Эйлера–Лагранжа, существует векторное поле X, для которого производная лагранжиана по X должна равняться нулю. Симметрия Нетер часто используются в космологии для скалярно-тензорной теории [20]. Таким образом, с точки зрения применения симметрии Нетер к моделям со скалярным полем наша работа не оригинальна. Новизна здесь заключается только в применении симметрии Нетер к обобщенной модели гравитации, что дает новые результаты. Выбор этой симметрии широко используется в альтернативных теориях гравитации и космологии [21]. Форму лагранжиана можно найти из условия симметрии Нетер [22-25]:

$$XL = 0, \tag{40}$$

где

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial R} + \gamma\frac{\partial}{\partial T} + \delta\frac{\partial}{\partial X} + \epsilon\frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \\ + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{R}} + \dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{T}} + \dot{\delta}\frac{\partial}{\partial \dot{X}} + \dot{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}. \tag{41}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ есть некоторые функции.

Для $F(R, X, \varphi)$ модели это выражение примет вид

$$6\left(\alpha F_R + \beta a F_{RR} + \delta a F_{RX} + \epsilon a F_{R\varphi} + 2\alpha_a a F_R + \beta_a a^2 F_{RR} + \delta_a a^2 F_{RX} + \epsilon_a a^2 F_{R\varphi}\right) \times \\ \times \dot{a}^2 + \dot{\varphi}^2\left(\epsilon_\varphi a^3 F_X - 6\alpha_\varphi a^2 F_{R\varphi} + \frac{3}{2}\alpha a^2 F_X + \frac{1}{2}\beta a^3 F_{XR} + \frac{1}{2}\delta a^3 F_{XX} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\epsilon a^3 F_{X\varphi}\right) + 6a\dot{a}\dot{R}(\beta a F_{RRR} + \delta a F_{RRR} + \epsilon a F_{RR\varphi} + 2\alpha_R F_R + (\alpha_a a + a + 2\alpha) \times \\ \times F_{RR} + \delta_R a F_{XR} + \epsilon_R a F_{R\varphi}) + 6a\dot{a}\dot{X}(2\alpha_X F_R + \alpha\beta_X F_{RR} + \beta a F_{RXR} + \delta a F_{RXX} +$$

$$+\epsilon a F_{RX\varphi} + +(2\alpha + \alpha_a a + \delta_X a)F_{XR} + \epsilon_X a F_{R\varphi} + 6a\dot{a}\dot{\varphi} +(\alpha\beta_\varphi F_{RR} + 2\alpha F_{R\varphi} +$$
$$+\beta a F_{R\varphi R} + \delta a F_{R\varphi X} + \epsilon a F_{R\varphi\varphi} + \alpha_a a F_{R\varphi} + \delta_\varphi a F_{RX} + \epsilon_\varphi a F_{R\varphi}) + 12a\dot{a}\dot{\varphi}F_R +$$
$$+6\dot{R}^2\alpha_R a^2 F_{RR} + 6\dot{X}^2\alpha_X a^2 - a^3\dot{a}\dot{\varphi}\epsilon_a F_X + 6a^2\dot{R}\dot{X}(\alpha_X F_{RR} + \alpha_R F_{RX}) +$$
$$+\dot{R}\dot{\varphi}a^2\left(6\alpha_\varphi F_{RR} - \epsilon_R a F_X + 6\alpha_R F_{R\varphi}\right) + \dot{X}\dot{\varphi}\left(-\epsilon_X a^3 F_X + 6\alpha_X a^2 F_{R\varphi} +\right.$$
$$\left.+6\alpha_\varphi a^2 F_{RX}\right) + +3a^2\alpha\left[F - (R-u)F_X + \frac{1}{3}a u_a F_R\right] - \beta a^3(R-u)F_{RR} -$$
$$-\delta a^3(R-u)F_{RX} + a^3 u_{\dot{a}} F_R\left(a\dot{\alpha}_a + \dot{R}a_R + \dot{X}a_X + \dot{\varphi}a_\varphi\right) - (\alpha 3F_X + \beta a F_{XR} +$$
$$+\delta a F_{XX} + \epsilon a F_{R\varphi})Xa^2 + \epsilon a^3\left[F_\varphi - (R-u)F_{X\varphi}\right] = 0. \quad (42)$$

Представив его в виде системы уравнений имеем

$$\dot{a}^2: \alpha F_R + \beta a F_{RR} + \delta a F_{RX} + \epsilon a F_{R\varphi} + 2\alpha_a a F_R +$$
$$+\beta_a a^2 F_{RR} + \delta_a a^2 F_{RX} + \epsilon_a a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (43)$$

$$\dot{R}^2: \alpha_R a^2 F_{RR} = 0, \quad (44)$$

$$\dot{X}^2: \alpha_X a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (45)$$

$$\dot{\varphi}^2: \epsilon_\varphi a^3 F_X - 6\alpha_\varphi a^2 F_{R\varphi} + \frac{3}{2}\alpha a^2 F_X + \frac{1}{2}\beta a^3 F_{XR} +$$
$$+\frac{1}{2}\delta a^3 F_{XX} + \frac{1}{2}\epsilon a^3 F_{X\varphi} = 0, \quad (46)$$

$$\dot{a}\dot{R}: 2\alpha F_{RR} + \beta a F_{RRR} + \delta a F_{RRX} + \epsilon a F_{RR\varphi} + 2\alpha_R F_R +$$
$$\alpha_a a F_{RR} + \beta_R a F_{RR} + \delta_R a F_{RX} + \epsilon_R a F_{R\varphi} = 0, \quad (47)$$

$$\dot{a}\dot{X}: 2\alpha_X F_R + \alpha\beta_X F_{RR} + 2\alpha F_{RX} + \beta a F_{RXR} + \delta a F_{RXX} +$$
$$+\epsilon a F_{RX\varphi} + \alpha_a a F_{XR} + \delta_X a F_{RX} + \epsilon_X a F_{R\varphi} = 0, \quad (48)$$

$$\dot{a}\dot{\varphi}: 2\alpha_\varphi F_R + \alpha\beta_\varphi F_{RR} - \epsilon_a\frac{a^2}{6}F_X + 2\alpha F_{R\varphi} + \beta a F_{R\varphi R} + \delta a F_{R\varphi X} +$$
$$\epsilon a F_{R\varphi\varphi} + \alpha_a a F_{R\varphi} + \delta_\varphi a F_{RX} + \epsilon_\varphi a F_{R\varphi} = 0, \quad (49)$$

$$\dot{R}\dot{X}: \alpha_X a^2 F_{R\varphi} + \alpha_\varphi a^2 F_{RX} = 0, \quad (50)$$

$$\dot{X}\dot{\varphi}: -\epsilon_X a^3 F_X + 6\alpha_X a^2 F_{R\varphi} + 6\alpha_\varphi a^2 F_{RX} = 0, \quad (51)$$
$$3\alpha\left[F - (R-u)F_R + \frac{1}{3}a u_a F_R\right] - \beta a(R-u)F_{RR} - \delta a(R-u)F_{RX} +$$
$$+\epsilon a\left[F_\varphi - (R-u)F_{R\varphi}\right] + \dot{a}a_a a u_{\dot{a}} F_R + \dot{\varphi}a_\varphi a u_{\dot{a}} F_R + \dot{R}a_R a u_{\dot{a}} F_R +$$
$$+\dot{X}a_X a u_{\dot{a}} F_R - \left(\alpha 3F_X + \beta a F_{XR} + \delta a F_{XX} + \epsilon a F_{R\varphi}\right)X = 0. \quad (52)$$

Аналогичные вычисления для модели $F(R, T, X, \phi)$ будут иметь следующий вид

$$
\begin{aligned}
&6\dot{a}^2(\alpha[F_R - F_T] + \beta\alpha[F_{RR} - F_{TR}] + \gamma\alpha[F_{RT} - F_{TT}] + \delta\alpha[F_{RX} - F_{TX}] + \\
&+\epsilon\alpha\big[F_{R\varphi} - F_{T\varphi}\big] + 6\dot{a}^2(\alpha_\alpha 2a[F_R - F_T] + \beta_a a^2 F_{RR} + \gamma_a a^2 F_{TR} + \delta_a a^2 F_{RX} + \\
&+\epsilon_a a^2 F_{R\varphi} + \dot{R}^2 6\alpha_R a^2 F_{RR} + \dot{T}^2 6\alpha_T a^2 F_{RT} + \dot{X}^2 6\alpha_X a^2 F_{RX} + \dot{\varphi}^2(\epsilon_\varphi a^3 F_X \\
&+6\alpha_\varphi a^2 F_{R\varphi} + \alpha\frac{3}{2}a^2 F_X + \beta\frac{1}{2}a^3 F_{XR} + \gamma\frac{1}{2}a^3 F_{XT} + \delta\frac{1}{2}a^3 F_{XX} + \epsilon\frac{1}{2}a^3 F_{X\varphi}) \times \\
&\times \dot{a}\dot{R}6a\big(\beta\alpha F_{RRR} + \gamma\alpha F_{RRT} + \gamma\alpha F_{RRX} + \epsilon\alpha F_{RR\varphi} + \gamma_R a F_{TR} + \delta_R a F_{RX} + \epsilon_R a F_{R\varphi}\big) + \\
&+\dot{a}\dot{R}6a\big(2\alpha_R[F_R - F_T] + (\alpha_\alpha a + \beta_R a + 2\alpha)\big) + \\
&+\dot{a}\dot{T}6a\big(\beta\alpha F_{TRR} + \gamma\alpha F_{TRT} + \gamma\alpha F_{TRX} + \epsilon\alpha F_{TR\varphi} + 2\alpha_T[F_R - F_T]\big) + \\
&+\dot{a}\dot{T}6a\Big((\alpha_\alpha a + 2\alpha + \gamma_T a)F_{TR} + \beta_T a F_{RR} + \delta_T a F_{RX} + \epsilon_T a F_{R\varphi}\Big) + \\
&+\dot{a}\dot{X}6a(2\alpha_X[F_R - F_T] + a\beta_X F_{RR} + a\gamma_X F_{TR} + \beta\alpha F_{RXR} + \gamma\alpha F_{RXT} + \gamma\alpha F_{RXX} + \\
&+\epsilon\alpha F_{RX\varphi}) + \dot{a}\dot{X}6a\Big((2\alpha + \alpha_\alpha a + \delta_X a)F_{RX} + \epsilon_X a F_{R\varphi}\Big) + \dot{a}\dot{\varphi}6a \times \\
&\times (2\alpha_\varphi + [F_R - F_T] + a\beta_\varphi F_{RR} + a\gamma_\varphi F_{TR} + \epsilon_a\frac{a^2}{6}F_X + 2\alpha F_{R\varphi}) + \dot{a}\dot{\varphi}6a \times \\
&\times \big(\beta\alpha F_{R\varphi R} + \gamma\alpha F_{R\varphi T} + \delta\alpha F_{R\varphi X} + \epsilon\alpha F_{R\varphi\varphi} + \alpha_\alpha a F_{R\varphi} + \delta_\varphi a F_{RX} + \epsilon_\varphi a F_{R\varphi}\big) + \\
&+\dot{R}\dot{T}6a^2(\alpha_R F_{TR} + \alpha_T F_{RR}) + \dot{R}\dot{X}6a^2(\alpha_X F_{RR} + \alpha_R F_{RX}) + \\
&+\dot{R}\dot{X}6a^2(\alpha_X F_{TR} + \alpha_T F_{RX}) + \dot{R}\dot{\varphi}a^2\big(6\alpha_\varphi F_{RR} + \epsilon_R a F_X + 6\alpha_R F_{R\varphi}\big) + \\
&+\dot{T}\dot{\varphi}\big(6\alpha_\varphi a^2 F_{TR} + \epsilon_T a^3 F_X + 6\alpha_T a^2 F_{R\varphi}\big) + \dot{X}\dot{\varphi} \times \\
&\times (\epsilon_X a^3 F_X + 6\alpha_X a^3 F_X + 6\alpha_T a^2 F_{RX}) + 3a^2\alpha \times \\
&\times \left[F - (R-u)F_R - (T-v)F_T + \frac{1}{2}a(u_a F_R + v_a F_T)\right] + \beta a^3[-(R-u)F_{RR} - \\
&-(T-v)F_{TR}] + \gamma a^3[-(R-u)F_{RT} - (T-v)F_{TT}] + \delta a^3[-(R-u)F_{RX} - \\
&-(T-v)F_{TX}] + \epsilon a^3[F_\varphi - (R-u)F_{R\varphi} - (T-v)F_{T\varphi}] + \\
&+a^3[u_{\dot{a}}F_R + v_{\dot{a}}F_T]\big(\dot{a}\alpha_\alpha + \dot{R}\alpha_R + \dot{T}\alpha_T + \dot{X}\alpha_X + \dot{\varphi}\alpha_\varphi\big) - \\
&-\big(\alpha 3F_X + \beta\alpha F_{XR} + \gamma\alpha F_{XT} + \delta\alpha F_{XX} + \epsilon\alpha F_{X\varphi}\big)Xa^2 = 0. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}^2\colon &\big(\alpha[F_R + F_T] + \beta\alpha[F_{RR} + F_{TR}] + \gamma\alpha[F_{RT} + F_{TT}] + \delta\alpha[F_{RX} + F_{TX}] \\
&+ \epsilon\alpha\big[F_{R\varphi} + F_{T\varphi}\big]\big) + \alpha_\alpha 2a[F_R + F_T] + \beta_a a^2 F_{RR} + \\
&+\gamma_a a^2 F_{TR} + \delta_a a^2 F_{RX} + \epsilon_a a^2 F_{R\varphi} = 0, \qquad (54)
\end{aligned}
$$

$$
\dot{R}^2\colon 6\alpha_R a^2 F_{RR} = 0, \qquad (55)
$$

$$
\dot{T}^2\colon 6\alpha_T a^2 F_{RT} = 0, \qquad (56)
$$

$$
\dot{X}^2\colon 6\alpha_X a^2 F_{RX} = 0, \qquad (57)
$$

$$
\dot{\varphi}^2\colon \epsilon_\varphi F_X - 6\frac{\alpha_\varphi}{a}F_{R\varphi} + \frac{3\alpha}{2a}F_X + \frac{\beta}{2}F_{XR} + \frac{\gamma}{2}F_{XT} + \frac{\delta}{2}F_{XX} + \frac{\epsilon}{2}F_{X\varphi}) = 0, \qquad (58)
$$

$$
\dot{a}\dot{R}\colon 2\alpha F_{RR} + \beta a F_{RRR} + \gamma a F_{RRT} + \delta a F_{RRX} + \epsilon a F_{RR\varphi} + 2\alpha_R[F_R + F_T] +
$$

$$+\alpha_a a F_{RR} + \beta_R a F_{RR} + \gamma_R \alpha F_{RXT} + \delta_R \alpha F_{TR} + \epsilon_R \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (59)$$

$$\dot{a}\dot{T}: 2\alpha F_{TR} + \beta a F_{TRR} + \gamma a F_{TRT} + \delta a F_{TRX} + \epsilon a F_{TR\varphi} + 2\alpha_T [F_R + F_T] + \\ +\alpha_a a F_{TR} + \beta_T a F_{RR} + \gamma_T \alpha F_{RT} + \delta_T \alpha F_{RX} + \epsilon_T \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (60)$$

$$\dot{a}\dot{X}: 2\alpha_X [F_R + F_T] + \alpha\beta_X F_{RR} + \alpha\gamma_X F_{TR} + 2\alpha F_{RX} + \beta\alpha F_{RXR} + \gamma\alpha F_{RXT} + \\ +\delta\alpha F_{RXX} + \epsilon\alpha F_{RX\varphi} + \alpha_a a F_{RX} + \delta_X \alpha F_{RX} + \epsilon_X \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (61)$$

$$\dot{a}\dot{\varphi}: 2\alpha_\varphi [F_R + F_T] + \alpha\beta_\varphi F_{RR} + \alpha\gamma_\varphi F_{TR} - \epsilon_a \frac{a^2}{6} F_X + 2\alpha F_{R\varphi} + \beta\alpha F_{R\varphi R} + \\ + \gamma\alpha F_{R\varphi T} + \delta\alpha F_{R\varphi X} + \epsilon\alpha F_{R\varphi\varphi} + \alpha_a a F_{R\varphi} + \delta_\varphi \alpha F_{RX} + \epsilon_\varphi \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (62)$$

$$\dot{R}\dot{T}: \alpha_R a^2 F_{TR} + \alpha_T a^2 F_{RR} = 0, \quad (63)$$

$$\dot{R}\dot{X}: \alpha_X a^2 F_{RR} + \alpha_R a^2 F_{RX} = 0, \quad (64)$$

$$\dot{T}\dot{X}: \alpha_X a^2 F_{TR} + \alpha_T a^2 F_{RX} = 0, \quad (65)$$

$$\dot{R}\dot{\varphi}: 6\alpha_\varphi a^2 F_{RR} - \epsilon_R a^3 F_X + 6\alpha_R a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (66)$$

$$\dot{T}\dot{\varphi}: 6\alpha_\varphi a^2 F_{TR} - \epsilon_R a^3 F_X + 6\alpha_T a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (67)$$

$$\dot{T}\dot{\varphi}: -\epsilon_X a^3 F_X + 6\alpha_X a^2 F_{R\varphi} + 6\alpha_\varphi a^2 F_{RX} = 0, \quad (68)$$

$$3\alpha \left[F - (R-u)F_R - (T-v)F_T + \frac{1}{3} a(u_a F_R + v_a F_T)\right] + \beta a[-(R-u)F_{RR} - \\ -(T-v)F_{TR}] + \gamma a[-(R-u)F_{RT} - (T-v)F_{TT}] + \delta a[-(R-u)F_{RX} - \\ -(T-v)F_{TX}] + \epsilon a[F_\varphi - (R-u)F_{R\varphi} - (T-v)F_{T\varphi} + \dot{a}\alpha_\alpha a[u_{\dot{a}} F_R + v_{\dot{a}} F_T] + \\ +\dot{\varphi}\alpha_\varphi a[u_{\dot{a}} F_R + v_{\dot{a}} F_T] + \dot{R}\alpha_R a[u_{\dot{a}} F_R + v_{\dot{a}} F_T] + \dot{T}\alpha_T a[u_{\dot{a}} F_R + v_{\dot{a}} F_T] + \\ +\dot{X}\alpha_X a[u_{\dot{a}} F_R + v_{\dot{a}} F_T] - \\ -\big(\alpha 3 F_X + \beta\alpha F_{XR} + \gamma\alpha F_{XT} + \delta\alpha F_{XX} + \epsilon\alpha F_{X\varphi}\big)X = 0. \quad (69)$$

1.3 Решение симметрии Нетер

Решение для случаев $F\,(R,T,X,\phi)$ и $F(R,X,\phi)$ будет иметь почти одинаковый алгоритм, кроме отличий, появляющихся из за числа переменных. Из системы уравнений, полученных из уравнений для $\dot{R}^2$, $\dot{T}^2$, и $\dot{X}^2$, мы имеем два решения. Первое решение представляет собой линейное уравнение $F = s_1\,(\phi)\,R + s_2(\phi)T + s_3\,(\phi)X + s4(\phi)$ из $F_{RR} = F_{RT} = F_{RX} = 0$. Это в частности вид для ОТО. Если же принимать во внимание что решение не линейное, то этого варианта нелинейного решения обнаружено что $\alpha_R = \alpha_T =$

$\alpha_X = 0$. Из уравнений для $\dot{R}\,\dot{\phi}$, $\dot{T}\,\dot{\phi}$ и $\dot{X}\,\dot{\phi}$ мы имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\epsilon_R}{F_{RR}} = \frac{\epsilon_T}{F_{RT}} = \frac{\epsilon_X}{F_{RX}} = -\frac{6\alpha_\varphi}{\alpha F_X}, \tag{70}$$

Последняя система уравнений может быть преобразована в другой вид для $F(R,T,X,\phi)$

$$F_{RR}F_{XT} = F_{RT}F_{RX,} \tag{71}$$

$$F_{RT}F_{XX} = F_{RX}F_{XT,} \tag{72}$$

$$F_{RR}F_{XX} = F_{RX}^2. \tag{73}$$

Последнее уравнение здесь является однородным уравнением Монжа-Ампера, но без зависимости от T. Теперь объедините уравнения для $\dot{a}\dot{R}$, $\dot{a}\dot{T}$ и $\dot{a}\dot{X}$ виде

$$Z(a,\phi)_R = Z(a,\phi)_T = Z(a,\phi)_X = 0, \tag{74}$$

где

$$Z(\alpha,\phi) = (2\alpha + \alpha_a\alpha)F_R + \beta\alpha F_{RR} + \gamma\alpha F_{RT} + \delta\alpha F_{RX} + \epsilon\alpha F_{R\phi}. \tag{75}$$

Эта подстановка очень полезна, поскольку позволяет исключить функции β, γ и δ из вычислений. Теперь с её помощью можно получить дополнительное уравнение Монжа-Ампера:

$$F_{RR}F_{TT} = F_{RT}^2 \tag{76}$$

Решения уравнений Монжа-Ампера, включающие одну произвольную функцию, дают следующий результат:

$$F = f(C_1(\varphi)R + C_2(\varphi)T + C_3(\varphi)X, \varphi) + C_4(\varphi)R + C_5(\varphi)T + \\ + C_6(\varphi)X + C_7(\varphi), \tag{77}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ являются функциями от φ. Другим решением является решение, включающее произвольные константы

$$F = (C_1(\varphi)R + C_2(\varphi)T + C_3(\varphi)X)^2 + C_4(\varphi)R + C_5(\varphi)T + \\ + C_6(\varphi)X + C_7(\varphi). \tag{78}$$

Это решение дает нам те же результаты, что и недавние наблюдения за ранней стадией инфляции, хорошо известной как модель Старобинского. Решение для модели $F(R,X,\phi)$ получено аналогичным образом более простым способом. Здесь сразу же получается уравнение Монжа–Ампера. Кроме того, поскольку компонентов модели меньше, этого уравнения достаточно для решения из следующего уравнения

$$F_{RR}F_{XX} = F_{RX}^2. \tag{79}$$

В этом случае решение, включающее произвольные константы, выглядит следующим образом:

$$F = (C_8(\varphi)R + C_9(\varphi)X)^2 + C_{10}(\varphi)R + C_{11}(\varphi)X + C_{12}(\varphi), \tag{80}$$

где C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12} являются функциями от φ.

В полученном виде лагранжиан удобен и может быть использован для решения приведенных выше уравнений Эйлера-Лагранжа. Однако общее решение довольно сложное. Особый случай можно найти для экспоненциального масштабного коэффициента для $F(R,T,X,\varphi)$, где для простоты мы принимаем, что $u = v = 0$ и $a = a_0 e^{H_0 t}$, где a_0, H_0- константы. Для этого случая, если мы примем, что $C_1, C_{2,\dots} C_6$ - константы, то φ будет иметь экспоненциальное решение

$$\varphi = \varphi_0 e^t. \tag{81}$$

Другим частным случаем является степенной масштабный коэффициент $a = a_0 t^n$, где n, a_0 - константы с теми же условиями, что и раньше. Этот масштабный коэффициент будет решением уравнений Эйлера–Лагранжа, если скалярное поле также имеет степенную зависимость от времени:

$$\varphi = \varphi_0 t^m, \tag{82}$$

где m, φ_0 - константы. Решения, аналогичные рассмотренным нами, ранее широко изучались для частных случаев k-эссенция и, например, космологии $F(R,X,\varphi)$ (последнее рассматривалось для модели с линейным X, которая не дает уравнения Монжа-Ампера) [26]. Здесь, мы показали, что эти модели, которые являются степенными и экспоненциальными моделями, могут быть получены для более общей формы решений. Такие решения можно найти применение в моделях с квантовой космологией f-эссенцию и других [27-32]. Аналогичные результаты можно найти для $F(R,X,\varphi)$. Здесь важно отметить, что n в степенном решении будет зависеть только от C_8, C_9, C_{10} и φ_0. Здесь, для степенного решения, параметр уравнения состояния ω стремится к-1. Такие модели уже обсуждались ранее, включая модели с компонентами R^2 и X^2. Фактически, модель $F(R,X,\phi)$ сводится к этим моделям, за исключением

компонента RX, который мы оба можем обнулить, получив модель Старобинского при $C_9 = 0$ или X^2 при $C_8 = 0$. При наличии компонента XR в этом случае изменяется поведение X, которое ведет себя так, как показано на рисунке 1. Особенностью решения будет существование решения, когда C_8, C_9 не равны нулю. Если мы возьмем здесь степенное решение для масштабного коэффициента, то получим сложное нелинейное дифференциальное неоднородное уравнение для кинетического члена X. Численный анализ показывает в какой-то момент времени, что значение X в этой модели может быть отрицательным от начального периода времени до некоторого момента, который в целом зависит от значений функций C. Конечно, такое решение нельзя считать полностью правильным, поскольку в данном случае мы рассматривали только степенное решение без экспоненциального, которое, конечно, будет преобладать в начальный период эволюции Вселенной. С другой стороны, следует отметить, что мы использовали только часть решения Монжа–Ампера. В общем случае это включает в себя как решение со свободной функцией, так и, возможно, другие решения, которые также могут влиять на форму масштабного коэффициента и кинетический член скалярного поля.



Рисунок 1 – Качественная демонстрация зависимости кинетического члена X от времени t для степенного масштабного коэффициента, а для лагранжиана с неминимальной зависимостью X от R

В любом случае, здесь нам удалось показать, что при рассмотрении обобщенной модели со скалярным полем, включающим F(R) и F(T)-гравитацию, как вместе, так и по отдельности, при использовании метода симметрии Нетер можно получить решение Старобинского. Также важно, что решение Старобинского получается, даже если мы рассматриваем отдельно только F(R) или только F(T)-гравитацию. То есть мы не сможем опровергнуть необходимость F(T)-гравитации здесь. В общем случае решение для лагранжиана может включать в себя более сложные решения. То есть включать не только R^2, но и любые другие виды функций, такие как экспоненциальные и/или степенные функции высокого порядка, которые также могут быть источником инфляции. Другими словами, здесь показано, что, если космологическая модель включает в себя k-эссенцию, инфляционная модель Вселенной является необходимым следствием наличия симметрии. К сожалению, поскольку мы взяли модель в ее наиболее общем виде, у нас нет возможности уточнить ее более точно, чтобы

подтвердить влияние симметрии на эволюцию Вселенной с помощью наблюдений. Хорошей возможностью для подтверждения было бы обнаружить влияние связанной компоненты лагранжиана RX. Однако на самом деле это не будет достаточным ограничением модели, поскольку существует вероятность того, что константы C_9 или C_3 равны нулю. Затем модель сводится к семейству хорошо разработанных моделей k-эссенция. Таким образом, единственный способ подтвердить этот механизм раздувания Вселенной - подтвердить существование кинетического члена k-эссенция или неминимально связанного кинетического члена X с R.

1.4 Представление Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера

В рамках данной работы применялись методы, направленные на исследование геометрии поверхности, описываемой нелинейным уравнением Монжа-Ампера. Для определения интегрируемости уравнения применено представление Лакса, которое является фундаментальным инструментом в теории солитонов. В исследовании также использовались солитонная геометрия, спектральная деформация и метод Сима-Тафеля, обеспечивающие условия интегрируемости уравнения Монжа-Ампера. Для анализа поверхности и её свойств применялись методы дифференциальной геометрии. В частности, была построена первая фундаментальная форма, которая позволила изучить внутреннюю геометрию и ключевые характеристики поверхности. Также рассматривались координатные углы и солитонная поверхность, что дало возможность изучить их свойства и применить в исследовании. Теория солитонов, стремительно развивающаяся в последние десятилетия, лежит в основе данного подхода. Решения нелинейных уравнений, описывающие солитоны, играют важную роль в физике и математике, так как демонстрируют устойчивость и структурную целостность. Эти уравнения также широко применяются для моделирования геометрических объектов и анализа их свойств. Уравнение Монжа-Ампера, названное в честь математиков Г. Монжа [33] и А. Ампера [34], занимает важное место в исследовании нелинейных явлений. Значительный вклад в изучение существования и регулярности решений был внесён Г. Минковским [35, 36]. А. Д. Александров [37–40] разработал концепцию слабых решений, доказав их существование и уникальность в разных размерностях. Позже Н. М. Бакельман [41] подтвердил эти результаты, изучая задачу Дирихле в уравнения Монжа-Ампера.

Эти результаты демонстрируют значение уравнения Монжа-Ампера, включая его применение для моделирования процессов, связанных с распространением оптических солитонов, где учитываются эффекты дисперсии и нелинейности. Настоящее исследование подтверждает эффективность геометрических методов и теории интегрируемости для анализа подобных систем, открывая перспективы для дальнейших исследований. Изучение решений уравнения Монжа-Ампера остаётся актуальным направлением современной науки. Особый интерес вызывает исследование поверхностей, связанных с различными моделями и их геометрическими свойствами. В

последние годы активно разрабатываются солитонные поверхности, встроенные в многомерное пространство линейной спектральной задачи, впервые предложенные А. Симом и Дж. Ли [42]. Кроме того, различные классы солитонных поверхностей, зависящие от моделей, были подробно изучены другими исследователями [43, 44]. В данной работе получены пары Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера. Используя представления Лакса, определены векторы положения поверхности, которые позволяют находить решения уравнения с заданной симметрией [45–49]. Представление Лакса в теории солитонов является одним из ключевых инструментов, обеспечивающих доказательство интегрируемости системы. В рамках исследования рассчитаны представления Лакса, соответствующие матрицы и основное уравнение Лакса.

Дополнительно, для построения представления Лакса для нелинейного второго уравнения Монжа-Ампера, введём обозначения для матриц M и N следующим образом: $M = -g^{11}A + g^{12}B$ и $N = -g^{21}A + g^{22}B$, где A и B— матрицы, связанные с геометрическими или спектральными характеристиками системы.

При этих обозначениях представление Лакса для уравнения Монжа-Ампера можно записать в виде следующих уравнений:

$$(g\psi)_x = -\lambda g M\psi - \lambda^2 g\psi_x, \tag{83}$$

$$(g\psi)_t = -\lambda g N\psi - \lambda^2 g\psi_t. \tag{84}$$

Рассмотрим уравнение Монжа-Ампера в следующем виде:

$$Z_{tt}Z_{xx} - Z_{tx}^2 = -k. \tag{85}$$

Давайте введем новые переменные $a = Z_x$ and $b = Z_t$. Для уравнения Монжа-Ампера можно записать пару Лакса в следующих компонентах:

$$g = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\dfrac{b_t}{b_x}} & 1 \\ 1 & 2\sqrt{\dfrac{a_t}{a_x}} \end{pmatrix}, \tag{86}$$

где M и N

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{2a_x(\sqrt{2a_x}(-b_{tt}b_x + b_t b_{xt} + b_x) + b_x(-b_{tx}b_x + b_t b_{xx}))}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \\ \dfrac{b_x(2a_x(b_{tt}b_x - b_t b_{xt}) + \sqrt{2}b_x(b_{tx}b_x - b_t b_{xx}))}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{b_x\left(\sqrt{2}a_{xx}b_x^2 - 2a_x^2 b_{xt} + a_x b_x\left(2a_{xt} - \sqrt{2}b_{tx}\right)\right)}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \\ \frac{2b_t\left(-a_{xx}b_x^2 + \sqrt{2}a_x^2 b_{xt} + a_x b_x\left(-\sqrt{2}b_{tx} + b_{xx}\right)\right)}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \end{matrix}\right), \quad (87)$$

$$N = \left(\begin{matrix} -\frac{2a_x(b_{tt}b_x^2 - b_t b_x\left(\sqrt{2}b_{tx} + b_{xt}\right) + \sqrt{2b_x^2} + b_{xx})}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \\ -\frac{b_x(\sqrt{2}a_{tt}b_x^2 - b_t b_x(2b_{tx} + \sqrt{2}b_{tx} + 2b_x^2 b_{xx})}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} \frac{b_x(-2a_{xx}b_t b_x + \sqrt{2a_x} + b_x^2 + a_x(-\sqrt{2}b_x b_{xt} + 2b_x b_{xx})}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \\ \frac{2b_t\left(\sqrt{2}a_{tt}b_t b_x - a_{xx}b_x^2 + a_x\left(b_x b_{xt} - \sqrt{2}b_t b_{xx}\right)\right)}{(-2a_x b_t + b_x^2)^2} \end{matrix}\right). \quad (88)$$

используя уравнения (83), (84), (87) и (88) мы получаем пару Лакса в матричной форме для уравнения Монжа-АмпераДля нелинейного уравнение Монжа ампера было найдено пара Лакса в виде:

$$U = \left(\begin{matrix} \lambda(2a_x\left(-\psi b_{tt}b_x + b_t\left(\psi b_{xt} + \sqrt{2}\lambda b_t\psi_x\right)\right) - \\ \frac{\sqrt{2}b_x(\psi b_{tx}b_x + b_t(-\psi b_{xx} + \lambda b_x\psi_x)))}{-2a_x b_t b_x + b_x^3} \\ -\lambda^2\psi_x \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} -\lambda^2\psi_x \\ \frac{\lambda(\psi a_x b_x\left(2a_{xt} - \sqrt{2}b_{xx}\right) + \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xx} + \lambda a_x\psi_x)}{2a_x b_t b_x - b_x^3} \\ -2a(\psi b_{xt} + \sqrt{2}\lambda b_t\psi_x) \end{matrix}\right), \quad (89)$$

$$V = \left(\begin{matrix} -\frac{\lambda\psi(\sqrt{2}b_{tt}b_x^2 - b_t b_x\left(2b_{tx} + \sqrt{2}b_{xt}\right) + 2b_t^2 b_{xx}}{-2a_x b_t b_x + b_x^3} - \frac{\sqrt{2}\lambda^2 b_t\psi_t}{b_x} \\ -\lambda^2\psi_t \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} -\lambda^2\psi_t \\ -\frac{\lambda\psi(2a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}a_{xt}b_x^2 b_t + a_x\left(\sqrt{2}b_x b_{tx} - 2b_t b_{xx}\right)}{-2a_x b_t b_x + b_x^3} - \frac{\sqrt{2}\lambda^2 a_x\psi_t}{b_x} \end{matrix}\right). \quad (90)$$

Далее, чтобы найти первую фундаментальную форму, мы использовали уравнение Сима-Тафеля. Уравнения Сима-Тафеля играют важную роль в анализе солитонов и нелинейных волновых структур в физике и математике. Чтобы найти первую фундаментальную форму, мы использовали деформацию спектрального параметра λ:

$$r_x = \psi^{-1} U \lambda \psi, \tag{91}$$

$$r_t = \psi^{-1} V \lambda \psi, \tag{92}$$

мы находим следующее:

$$U\lambda = \begin{pmatrix} a_x\left(-2\psi b_{tt} b_x + 2b_t\left(\psi b_{xt} + \sqrt{2}\lambda b_t \psi_x\right)\right) + \\ \sqrt{2}b_x\left(-\psi b_{tx} b_x + b_t(\psi b_{xx} - 2\lambda b_x \psi_x)\right) \\ \hline -2a_x b_t b_x + b_x^3 \\ -2\lambda\psi_x \\ -2\lambda\psi_x \\ \psi a_x b_x\left(-2a_{xt} + \sqrt{2}b_{xx}\right) - \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xx} + 2\lambda a_x \psi_x) \\ +2a_x^2(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t \psi_x) \\ \hline 2a_x b_t b_x - b_x^3 \end{pmatrix}, \tag{93}$$

$$V\lambda = \begin{pmatrix} -\dfrac{\psi(\sqrt{2}b_{tt}b_x^2 - b_t b_x\left(2b_{tx} + \sqrt{2}b_{xt}\right) + 2b_t^2 b_{xx}}{-2a_x b_t b_x + b_x^3} - \dfrac{2\sqrt{2}\lambda b_t \psi_t}{b_x} \\ -2\lambda\psi_t \\ -2\lambda\psi_t \\ -\dfrac{\psi(2a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}a_{xt}b_x^2 b_t + a_x\left(\sqrt{2}b_x b_{tx} - 2b_t b_{xx}\right)}{-2a_x b_t b_x + b_x^3} - \dfrac{2\sqrt{2}\lambda a_x \psi_t}{b_x} \end{pmatrix}. \tag{94}$$

Были исследованы дифференциальные квадратичные формы, выражающие квадрат элемента длины на поверхности. Особое внимание уделено первой фундаментальной форме, которая описывает внутреннюю геометрию поверхности, независимую от её расположения в пространстве. Исследование первой фундаментальной формы позволило выявить ключевые свойства поверхности, такие как длины кривых и углы между пересекающимися кривыми.

Коэффициенты первой фундаментальной формы были определены через преобразования формы при переходе от одной криволинейной системы координат к другой. Это позволило описать свойства поверхности, такие как угол между двумя пересекающимися кривыми, зависящий от отношения

дифференциалов криволинейных координат, взятых вдоль кривых в точках их пересечения.

Для параметризованной поверхности были вычислены коэффициенты первой фундаментальной формы, которые описывают внутреннюю геометрию поверхности. Это позволило исследовать такие характеристики, как углы между пересекающимися кривыми и инвариантные свойства при преобразовании координат.

Полученные результаты подчёркивают значение первой фундаментальной формы как ключевого инструмента в изучении внутренней геометрии поверхностей. Она позволяет описывать свойства, такие как длины дуг и углы, независимо от расположения поверхности в пространстве.

Коэффициенты первой фундаментальной формы для параметризованной поверхности имеют следующий вид:

$$r = r(x,t). \tag{95}$$

Независимо от того, являются ли параметры (x,t) независимыми аргументами или какими-либо функциями других независимых аргументов, полная разность dr радиус-вектора r текущей точки поверхности представляется в виде (векторной) инвариантной линейной дифференциальной формы [45, p. 3092; 46, p. 115; 47, p. 533; 48, p. 1850082-6].

$$dr = r_x dx + r_t dt. \tag{96}$$

Которая является скалярной квадратичной дифференциальной формой, обладает тем же свойством инвариантности

$$dr^2 = r_x^2 dx^2 + 2r_x r_t dxdt + r_t^2 dt^2. \tag{97}$$

В развернутом виде мы можем написать в следующей форме:

$$dr^2 = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2, \tag{98}$$

где E, F, G - первая квадратичная форма определяется из ранее полученного выражения:

$$E = r_x^2; F = r_x r_t; G = r_t^2, \tag{99}$$

где

$$r_x = \Phi^{-1} U_\lambda \Phi;\ r_t = \Phi^{-1} V_\lambda \Phi; r_x r_t = \Phi^{-1} U_\lambda V_\lambda \Phi. \tag{100}$$

Рассмотрим двумерную поверхность:

$$\vec{r}_x^2 = -\frac{1}{2}tr(r_x^2);\ \vec{r}_t^2 = -\frac{1}{2}tr(r_t^2); r_x r_t = -\frac{1}{2}tr(r_x r_t); \qquad (101)$$

чтобы найти первую фундаментальную форму, мы использовали (100) и (101) уравнения и получили коэффициенты для нахождения первой формы:

$$E = -4\lambda^2\psi_x^2 + \frac{(\psi a_{bx}\left(-2a_{xt} + \sqrt{2}b_{xx}\right) - \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xx} + 2\lambda a_x\psi_x) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+2a_x^2\left(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x\right))^2 + (2a_x\left(\psi b_{tt}b_x - b_t\left(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x\right)\right) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+\sqrt{2}b_x\left(\psi b_{tx}b_x + b_t(-\psi b_{xx} + 2\lambda a_x\psi_x)\right))^2}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}. \qquad (102)$$

$$F = -4\lambda^2\psi_t\psi_x + \frac{(2\psi a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}\psi a_{xt}b_x^2 + a_x(\sqrt{2}\psi b_x b_{xt} - 2\psi b_t b_{xx} +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+4\sqrt{2}\lambda a_x b_t\psi_t - 2\sqrt{2}\lambda b_x^2\psi_t))(-\sqrt{2}\psi a_{xx}b_x^2 + 2a_x^2(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+a_x b_x + (-2\psi a_{xt} + \sqrt{2(}\psi b_{xx} - 2\lambda b_x\psi_x))) + (-\sqrt{2}\psi b_{tt}b_x^2 + b_t^2(-\psi b_{xx} +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+4\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t) + b_t b_x(2\psi b_{tx} + \sqrt{2}(\psi b_{xt} - 2\lambda b_x\psi_t)))(a_x(-2\psi b_{tt}b_x + 2b_t(\psi b_{tx} +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x)) + \sqrt{2}b_x(-\psi b_{tx}b_x + b_t(\psi b_{xx} - 2\lambda b_x\psi_x)))}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}. \qquad (103)$$

$$G = -4\lambda^2\psi_t^2 + \left(\frac{\psi\left(2a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}a_{xt}b_x^2 + a_x\left(\sqrt{2}b_x b_{xt} - 2b_t b_{xx}\right)\right)}{-2a_x b_t - b_x^2} -\right.$$
$$\left. - \frac{2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t)}{b_x}\right)^2 + \left(\frac{\psi\left(\sqrt{2}b_{xt}b_x^2 - b_t b_x\begin{pmatrix}2b_{tx}\\+\sqrt{2}b_{xt}\end{pmatrix} + 2b_t^2 b_{xx}\right)}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_t)}{b_x}\right)^2. \qquad (104)$$

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности образуют компоненты симметричного дважды ковариантного тензора. Для локальной карты брались разбиение ее прообраза в координатной плоскости сеткой малых

квадратов и образ каждого квадрата заменяют параллелограммом с вершиной в образе одной из вершин и со сторонами – касательными векторами, образами при дифференциале сторон квадратика в этой вершине. Сумма площадей параллелограммов, вычисленная в трехмерном пространстве, и является аппроксимацией площади поверхности.

Полученные коэффициенты E, F и G исследуются для оценки формы поверхности и анализа ее геометрических свойств. Используя преобразования первой квадратичной формы поверхности, при переходе из одной криволинейной системы координат в другую была найдена первая квадратичная форма поверхности. Первая фундаментальная форма, которая показывает важнейший объект дифференциальной геометрии, описывающий внутреннюю геометрию поверхности и ее свойства, не зависящие от ее расположения в пространстве. В результате первая фундаментальная форма получилась в следующем виде:

$$I = -4\lambda^2\psi_x^2 + \frac{(\psi a_{bx}\left(-2a_{xt} + \sqrt{2}b_{xx}\right) - \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xx} + 2\lambda a_x\psi_x) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+2a_x^2\left(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x\right))^2 + (2a_x\left(\psi b_{tt}b_x - b_t\left(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x\right)\right) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+\sqrt{2}b_x(\psi b_{tx}b_x + b_t(-\psi b_{xx} + 2\lambda a_x\psi_x)))^2}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2} - 4\lambda^2\psi_t\psi_x$$
$$+\frac{(2\psi a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}\psi a_{xt}b_x^2 + a_x(\sqrt{2}\psi b_x b_{xt} - 2\psi b_t b_{xx} +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+4\sqrt{2}\lambda a_x b_t\psi_t - 2\sqrt{2}\lambda b_x^2\psi_t))(-\sqrt{2}\psi a_{xx}b_x^2 + 2a_x^2(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+a_x b_x + (-2\psi a_{xt} + \sqrt{2}(\psi b_{xx} - 2\lambda b_x\psi_x))) + (-\sqrt{2}\psi b_{tt}b_x^2 + b_t^2(-\psi b_{xx} +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+4\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t) + b_t b_x(2\psi b_{tx} + \sqrt{2}(\psi b_{xt} - 2\lambda b_x\psi_t)))(a_x(-2\psi b_{tt}b_x + 2b_t(\psi b_{tx} +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2}$$
$$\frac{+2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x)) + \sqrt{2}b_x(-\psi b_{tx}b_x + b_t(\psi b_{xx} - 2\lambda b_x\psi_x)))}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2} - 4\lambda^2\psi_t^2$$
$$+\left(\frac{\psi\left(2a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}a_{xt}b_x^2 + a_x\left(\sqrt{2}b_x b_{xt} - 2b_t b_{xx}\right)\right)}{-2a_x b_t - b_x^2} - \frac{2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t)}{b_x}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\psi\left(\sqrt{2}b_{xt}b_x^2 - b_t b_x\left(2b_{tx} + \sqrt{2}b_{xt}\right) + 2b_t^2 b_{xx}\right)}{(-2a_x b_t b_x + b_x^3)^2} + \frac{2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_t)}{b_x}\right)^2. \quad (105)$$

Набор факторов, относящихся к поверхности, который может быть получен с использованием первой фундаментальной формы, составляет внутреннюю геометрию поверхности. Зная первую квадратичную форму

поверхности, можно рассчитать длины кривых на поверхности, углы между ними и площади областей на поверхности.

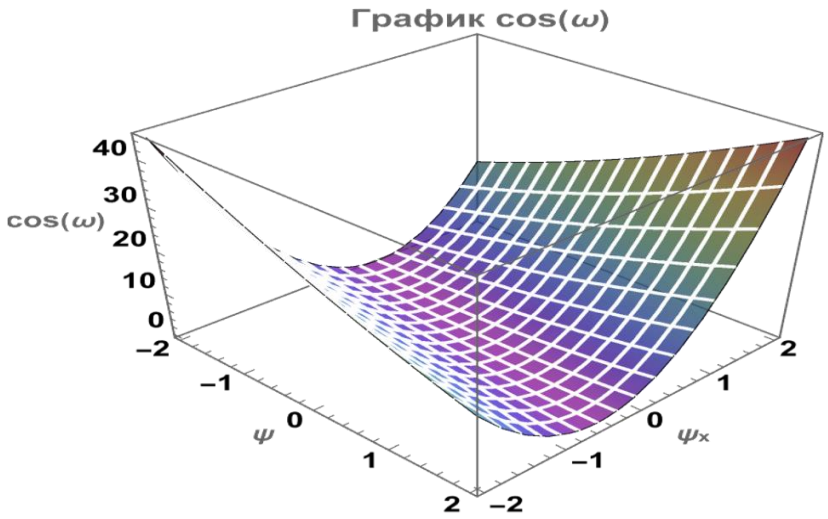


Рисунок 2 – Координатный угол для cos

$$cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \tag{106}$$

$$sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}. \tag{107}$$

$$cos\omega = \frac{\begin{pmatrix}(-\psi b_t b_x(2b_{xt} + \sqrt{2}b_{xt}) + 2b_x^2(\sqrt{2}(\psi b_{xx} - 2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t) \\ +2b_x^2(\psi b_{tt} + 2\lambda b_x\psi_x))^2 -\end{pmatrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$

$$-4\lambda^2\psi_t\psi_x + 2\lambda^2\psi_x^2 + \frac{\begin{pmatrix}\psi b_t(2a_{xx}b_t + \sqrt{2}a_x b_{xt} - \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xt} + 2\lambda a_x\psi_t)) \\ +2a_x b_t(-\psi b_{xx} + 2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t))\end{pmatrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$

$$\frac{\begin{pmatrix}\psi a_x b_x(-2a_{xt} + \sqrt{2}b_{xx}) - \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xx} + 2\lambda a_x\psi_x) \\ +2a_x^2(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x)\end{pmatrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$

$$+\frac{\begin{pmatrix}(-\sqrt{2}\psi b_{tt}b_x^2 + b_t^2(-2\psi b_{xx} + 4\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t) \\ +b_t b_x(2\psi b_{tx} + \sqrt{2}(\psi b_{xt} - 2\lambda b_x\psi_t))\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\psi a_{xx}b_t b_x - \sqrt{2}\psi a_{xt}b_x^2 \\ +a_x(\sqrt{2}\psi b_x b_{xt} - 2\psi b_t b_{xx} + 4\sqrt{2}\lambda a_x b_t b_{xt} - 2\sqrt{2}\lambda b_x^2\psi_t)^2\end{pmatrix}}$$

$$-\frac{4\lambda^2\psi_x^2(2a_x(\psi b_{tt}b_x - b_t(\psi b_{tx} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x) +}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$

$$\frac{+\sqrt{2}b_x(\psi b_{tx}b_x + b_t(-\psi b_{xx} + 2\lambda b_x\psi_x))2}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}. \quad (108)$$

$$sin\omega = 2\lambda^2\psi_x^2 + \frac{\begin{matrix}2(\psi b_x(2a_{xx}b_t + \sqrt{2}a_x b_{xt} - \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xt} + 2\lambda a_x\psi_t)\\ +2a_x b_t(-\psi b_{xx} + 2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t)\end{matrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$
$$+\frac{\begin{matrix}2(\psi a_x b_x(-2a_{xt}b_t + \sqrt{2}b_{xx}) + \sqrt{2}b_x^2(\psi a_{xx} + 2\lambda a_x\psi_x)\\ +2a_x^2(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x))^2\end{matrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$
$$+\frac{\begin{matrix}2b_t(\psi b_{xt} + 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x) + \sqrt{2}b_x(-\psi b_{tx}\psi b_x\\ +b_t(\psi b_{xx} - 2\lambda b_x\psi_x)\end{matrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}$$
$$\frac{\psi(-2a_{xx}b_t - 2\sqrt{2}\lambda b_t\psi_x + b_x(\sqrt{2}a_{xt} + b_{xx}))}{2a_x b_t - b_x^2} + \frac{\psi b_{xx} - 2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t}{b_x})^2 +$$
$$\frac{\begin{matrix}(-\psi b_t b_x(2b_{tx} + \sqrt{2}b_{xt}) + \sqrt{2}b_x^2(\psi b_{xx} - 2\sqrt{2}\lambda a_x\psi_t) +\\ +\sqrt{2}b_x^2(\psi b_{tt} + 2\lambda b_t\psi_t))^2\end{matrix}}{(-2a_x b_t b_x + b_x^2)^2}. \quad (109)$$

Данное исследование посвящено изучению уравнений Монжа-Ампера с использованием дифференциально-геометрических методов. Уравнения Монжа-Ампера представляют собой широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Нелинейность играет важнейшую роль в описании большинства процессов, происходящих в окружающем мире. Соответственно, математические модели, описывающие такие процессы, чаще всего являются нелинейными. Линейные модели, хотя и предоставляют удобный инструментарий для анализа, дают лишь приближенное представление о реальности. Например, одномерное линейное волновое уравнение может описывать колебания струны только при малых амплитудах. Однако для более сложных и реалистичных систем требуется учет нелинейных эффектов, что делает уравнения Монжа-Ампера особенно важными в теоретической физике и математической физике.

В рамках данной работы были получены пары Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера. Представления Лакса являются фундаментальным инструментом в теории солитонов, так как они позволяют доказать интегрируемость системы. Используя представления Лакса, были найдены векторы положения поверхности, что позволило изучить решения уравнения Монжа-Ампера с заданной симметрией.

Кроме того, проведён расчет представления Лакса, изучены соответствующие матрицы и основное уравнение Лакса. Анализ спектральной деформации, связанный с гауссовой и средней кривизнами поверхности, дополнил картину геометрического подхода к исследованию нелинейных уравнений. Построенные графики, отражающие свойства кривизн и солитонных поверхностей, подтвердили важность геометрических методов для анализа таких систем.

В этом разделе мы изучили частный случай, в котором рассматривали однородное (k=0) нелинейное уравнение второго порядка Монжа- Ампера в следующем виде:

$$Z_{tt}Z_{xx} - Z_{tx}^2 = k. \tag{110}$$

Простейшее решение для однородных уравнений Монжа-Ампера - решение в квадратичной форме:

$$Z = (c_1 t + c_2 x)^2 + c_3 x + c_4 x + c_5 x. \tag{111}$$

для Z это будет равно $a_x = 2c_2^2;\ a_t = 2c_2c_1;\ b_x = 2c_2c_1;\ b_t = 2c_1^2$ и $a_{xx} = a_{xt} = a_{tt} = 0$; $b_{xx} = b_{xt} = b_{tt} = 0$.

Условие совместности пары Лакса

$$[U, \mathrm{V}] = \mathrm{U}V - \mathrm{V}U = 0 \tag{112}$$

приводит к начальному уравнению Монжа-Ампера:

$$\psi_{tt}\psi_{xx} - (\psi_{tx})^2 + \lambda^2\psi^3 = 0. \tag{113}$$

Уравнение Монжа-Ампера является интегрируемым и допускает представление через пару Лакса.

Тогда пары Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера имеют вид:

$$U = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}\lambda^2 b_t \psi_x}{b_x} & -\lambda^2\psi_x \\ -\lambda^2\psi_x & -\dfrac{\sqrt{2}\lambda^2 a_x \psi_x}{b_x} \end{pmatrix}, \tag{114}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\dfrac{-\sqrt{2}\lambda^2 b_t \psi_t}{b_x} & -\lambda^2 \psi_t \\ -\lambda^2 \psi_t & -\dfrac{-\sqrt{2}\lambda^2 b_t \psi_t}{b_x} \end{pmatrix}. \tag{115}$$

Деформация спектрального параметра λ используется в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}\lambda^2 b_t \psi_x}{b_x} & -\lambda^2 \psi_x \\ -\lambda^2 \psi_x & -\dfrac{\sqrt{2}\lambda^2 a_x \psi_x}{b_x} \end{pmatrix}, \tag{116}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{-2\sqrt{2}\lambda b_t \psi_t}{b_x} & -2\lambda \psi_t \\ -2\lambda \psi_t & -\dfrac{2\sqrt{2}\lambda b_t \psi_t}{b_x} \end{pmatrix}. \tag{117}$$

используя уравнения (114), (115), (116) и (117), мы нашли коэффициенты первой фундаментальной формы, которые имеют вид:

$$E = -\frac{4\lambda^2 (a_x^2 + b_t^2 + b_x^2)\psi_x^2}{b_x^2}, \tag{118}$$

$$F = -\frac{4\lambda^2 (a_x b_t + b_t^2 + b_x^2)\psi_t \psi_x}{b_x^2}, \tag{119}$$

$$E = -\frac{4\lambda^2 (2b_t^2 + b_x^2)\psi_t^2}{b_x^2}. \tag{120}$$

используя коэффициент, мы можем найти фундаментальные формы в следующем виде.

Первая фундаментальная форма:

$$I = -\frac{4\lambda^2 \begin{pmatrix} 2a_x b_t \psi_t \psi_x + a_x^2 \psi_x^2 + \\ b_t^2 (2\psi_t \psi_x + 2\psi_t^2 + \psi_x^2) + b_x^2 (\psi_t + \psi_x) \end{pmatrix}}{b_x^2}, \tag{121}$$

Вторая фундаментальная форма:

$$\text{II}= -2\sqrt{2}\lambda\sqrt{-\frac{\lambda^4\psi_t^2\psi_x^2(a_x-b_t)^2}{b_x^2}} = -2\sqrt{2}\lambda\sqrt{-\frac{\lambda^4\psi_t^2\psi_x^2(2C_2^2-2C_2 2C_1)^2}{C_2^2}}, \qquad (122)$$

В работе были также найдены координатные углы θ описывающие геометрическую конфигурацию пространства-времени в параметрах c_1 и c_2. Эти углы определяются через функции $cos\theta$ и $sin\theta$.

Координатный угол $cos\theta$:

$$cos\theta = \frac{C_1^2 + 2C_2^2}{C_2^2\sqrt{\frac{2C_1^4}{C_2^4} + \frac{3C_1^2}{C_2^2} + 3 + \frac{C_2^2}{C_1^2}}}, \qquad (123)$$

Координатный угол $sin\theta$:

$$sin\theta = \frac{\sqrt{\frac{C_1^4}{C_2^4} - \frac{C_1^2}{C_2^2} - 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2}}}{\sqrt{\frac{2C_1^4}{C_2^4} + \frac{3C_1^2}{C_2^2} + 3 + \frac{C_2^2}{C_1^2}}}. \qquad (124)$$

Коэффициенты фундаментальных форм поверхности в дифференциальной геометрии имеют решающее значение для описания геометрических и аналитических свойств поверхностей. Они используются для изучения кривизны и других локальных свойств поверхности.

Первая фундаментальная форма описывает метрику поверхности, то есть позволяет измерять длины кривых, углы между кривыми и площади на поверхности.

Вторая фундаментальная форма связана с кривизной поверхности. Она описывает, как быстро нормаль к поверхности меняется в различных направлениях.

Коэффициенты первой фундаментальной формы (E, F, G) позволяют вычислять расстояния и углы на поверхности. Они также используются для определения площадей элементов поверхности.

Коэффициенты второй фундаментальной формы (L, M, N) важны для изучения кривизны поверхности. Из этих коэффициентов можно вывести главные кривизны, среднюю кривизну и гауссову кривизну поверхности.

Эти величины играют ключевую роль в классификации точек на поверхности по их геометрическим и топологическим свойствам. Гауссова кривизна (K) и средняя кривизна (H) выражаются через коэффициенты фундаментальных форм следующим образом:

$$K = \frac{\lambda^2 c_2^2}{2(c_1^2 + c_2^2)} \qquad (125)$$

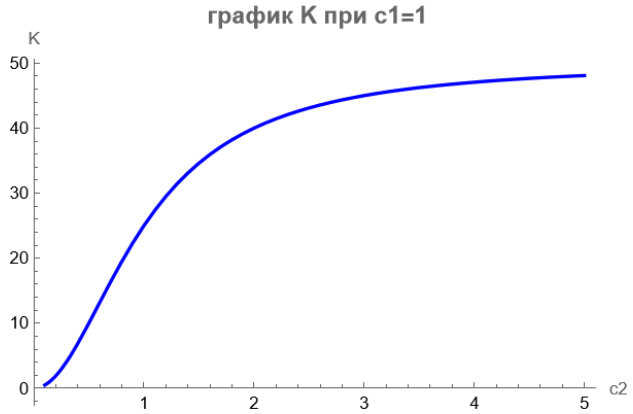


Рисунок 3 – Гауссовая кривизна

На рисунке 3 представлена зависимость K от c_2 при фиксированном $c_1 = 1$ и $\lambda = 1$. График показывает, что значение Гауссовой кривизны K увеличивается с ростом параметра c_2, приближаясь асимптотически к своему предельному значению.

Средняя кривизна

$$H = \frac{\lambda^3(a_x b_t + b_t^2 + b_x^2)\psi_t\psi_x}{\sqrt{2}(b_t^2 + b_x^2)\sqrt{-\frac{\lambda^4(a_x - b_t)\psi_t^2\psi_x^2}{b_x^2}}} = \frac{-\sqrt{2}c_1^2 c_2^2(c_1^2 + 2c_2^2)}{\lambda\psi_t\psi_x(c_1^4 - c_2^4)}. \qquad (126)$$

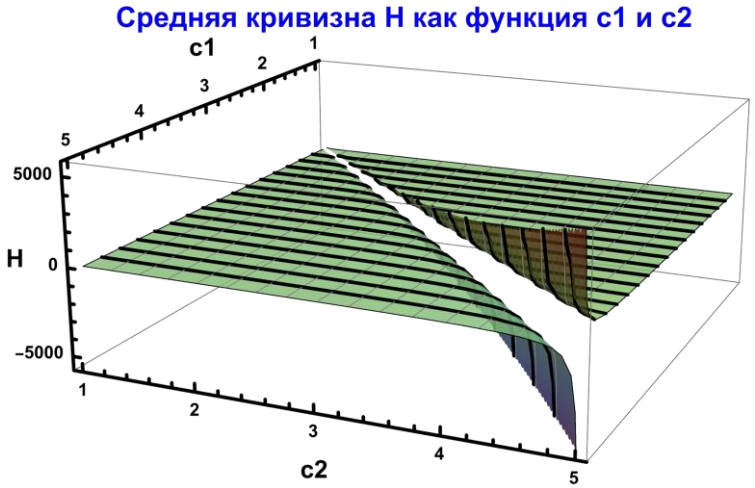


Рисунок 4 – Средняя кривизна

График средней кривизны H, представленный на рисунке 4, показывает зависимость геометрических характеристик поверхности, связанной с уравнением Монжа-Ампера, от параметров c_1 и c_2, которые представляют пространственные параметры. Положительные значения H указывают на участки поверхности с выпуклой формой, тогда как отрицательные значения соответствуют вогнутым областям. Резкие изменения кривизны, наблюдаемые в виде пиков и провалов, отражают переходные зоны, где поверхность меняет свою локальную форму.

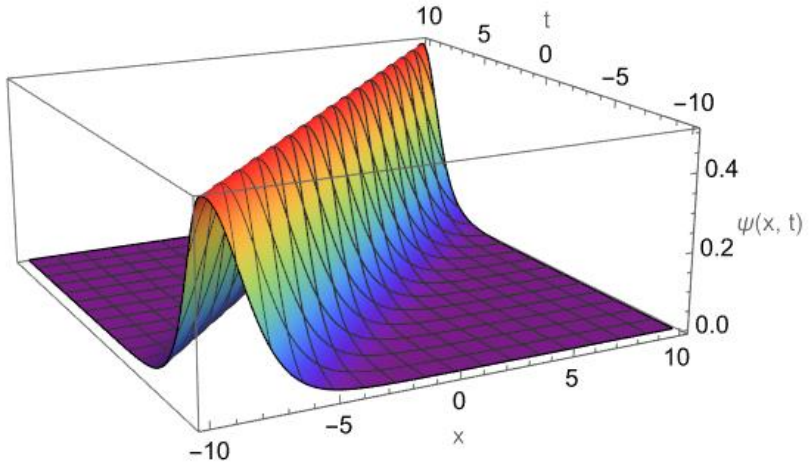


Рисунок 5 - Солитонная поверхность уравнения МА.

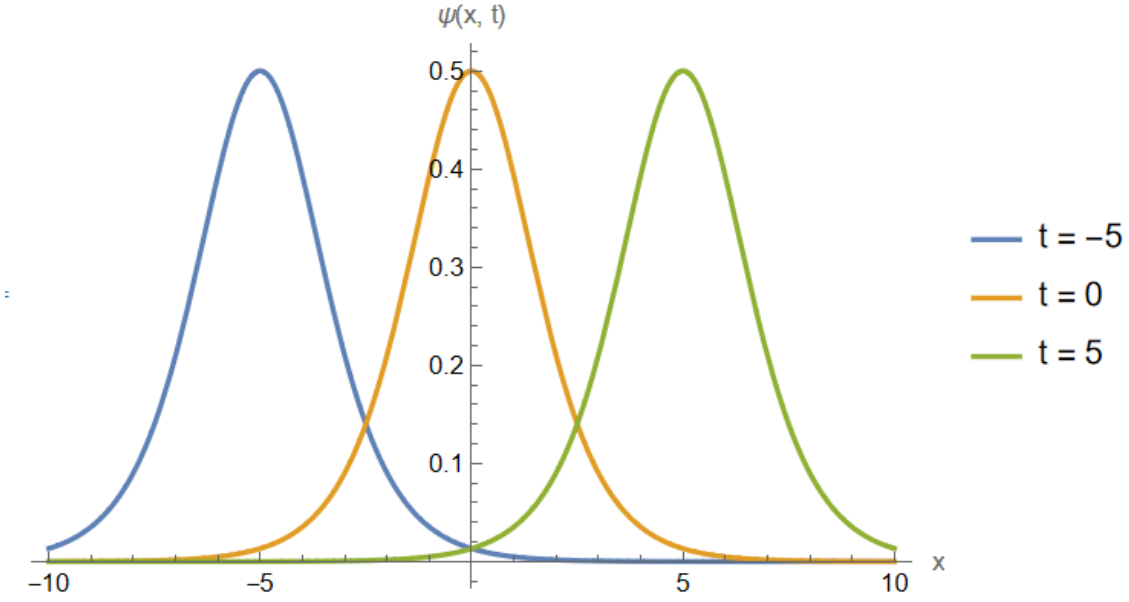


Рисунок 6 – График односолитонного решения уравнения МА.

На рисунке 6 график временных срезов односолитонного решения для уравнения Монжа-Ампера при различных значениях времени (t=-5; t=0; t=5).

Выводы по первому разделу

В этом разделе показано, что инфляционная модель является результатом симметрии общей космологической модели F(R,T,X,φ) с использованием симметрии Нетер. Это приводит к решению, частным случаем которого является космологическая модель Старобинского. Показано, что даже в частном случае космологических моделей F(R,X,φ) и F(T,X, φ) мы все равно получаем уравнение Монжа-Ампера, решение которого включает модель Старобинского.

В разделе был проведён анализ геометрии поверхностей и связанных с ними физических процессов на основе нелинейного уравнения Монжа-Ампера. Были найдены свойства геометрических характеристик, такие как гауссова и средняя кривизны, а также построены графики, позволяющие визуализировать поведение поверхностей и их динамику.

В рамках работы была определена пара Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера, что позволило подтвердить интегрируемость системы. Гауссова кривизна K, построенная как функция параметра c_2 при фиксированном c_1=1, показала плавное увеличение и асимптотическое приближение к предельному значению, демонстрируя геометрическую зависимость кривизны от параметров системы. Средняя кривизна H продемонстрировала более сложное поведение с разрывами в областях сингулярностей при $c_1^4 = c_2^4$ и сильной нелинейной зависимостью от параметров c_1 и c_2. Дополнительно исследована солитонная поверхность, поведение которой описывалось характерной затухающей или распространяющейся волной. Эта структура демонстрирует устойчивость волнового решения и его тесную связь с геометрией поверхности, что подчёркивает значимость спектральной деформации в анализе.

В этой главе было показано, что решение уравнения Монжа-Ампера имеет в том числе солитонное решение. В целом это решение имеет применение в транспортной задаче, для оптимизации потоков, в оптике. В рамках данной диссертации показано, что Вселенная может развиваться как единичный солитон.

2 ОБОБЩЕННЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ F(R,T) и F(R,Q)

Здесь рассматривается гравитационная модель, которая взаимодействует с скалярным и фермионным полем в однородном и изотропном плоском пространстве-времени ФЛРУ. Основной идеей и целью проделанной работы было создание математической модели и нахождение конкретного решения для описывающего динамику эволюции Вселенной. Решения для этих моделей получены с использованием метода симметрии Нетер. С его помощью получается конкретная форма лагранжиана. Были найдены возможные типы масштабного фактора. Была исследована эволюция полученной космологической модели. Считается, что Вселенная возникла около 14 миллиардов лет назад после Большого взрыва, когда она начала быстро расширяться. Этот период экспоненциального расширения Вселенной известен как период начальной инфляции. Очевидно, инфляционная космологическая модель тесно связана с теорией тяготения. Традиционно космология использует гравитационную модель Эйнштейна-Гильберта. Но он не описывает начальную инфляционную стадию расширения Вселенной. Здесь необходимо использовать обобщенную гравитационную модель, содержащую, например, квадратичные и высшие члены скаляра Риччи R, так и другие компоненты метрик-аффинной теории, в частности неметричность Q. В качестве более общей модели часто рассматривается модель, содержащая не только скаляр кривизны, но и такой параметр, как скаляр кручения T, в качестве элемента крутильной гравитация, которая также позволила дать основные теоретические объяснения относительно ускорения Вселенной в более позднее время. В этой главе рассматривается наиболее общий тип модели - гравитационная модель F(R,T) и F(R,Q) [50-52].

2.1 Гравитация F (R, T) с фермионными полями

Фермионное поле является одной из возможных причин расширения Вселенной, описание эволюции Вселенной в моделях скалярного поля хорошо разработано. такие модели описывают ускоренное расширение ранних и поздних времен. Но подобных работ по моделям с фермионными полями не так много. В то же время нет работ, описывающих эволюцию позднего времени с гравитацией, написанных фермионным полем в обобщенном виде с телепараллель гравитацией. В этом разделе мы рассмотрим космологию с гравитационной моделью в ее наиболее общем виде с фермионным полем. Соответствующее действие для модели F(R,T), взаимодействующей с полем фермионов в метрике ФЛРУ, имеет вид [53-55]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}h(u)F(R,T) + Y - V(u)\right\}, \tag{127}$$

здесь

$$Y = \frac{i}{2}[\overline{\psi}\Gamma^{\mu}(\vec{\partial}_{\mu} - \Omega_{\mu})\psi - \overline{\psi}(\vec{\partial}_{\mu} + \Omega_{\mu})\Gamma^{\mu}\psi, \tag{128}$$

где Y – канонический кинетический член фермионного поля;

$\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}$ – соединение Леви-Чивита;

ψ и его смежный $\psi = \psi^{\dagger}\psi^{0}$ обозначим фермионное поле, кинжал для его комплексного сопряжения, функцию времени;

g – определитель метрического тензора;

R – скаляр Риччи;

T – скаляр кручения

$$\Omega^{\mu} = -\frac{1}{4} g_{\sigma\nu}\left[\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - e^{\nu}_{b}\partial_{\mu}e^{b}_{\lambda}\right]\Gamma^{\sigma}\Gamma^{\lambda}, \quad (129)$$

это вращающееся соединение.

В в рамках модели ФЛРУ перепишем как

$$R_{s} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right), \quad (130)$$

и

$$T_{s} = 6\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}, \quad (131)$$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt}. \quad (132)$$

Действие примет следующий вид

$$S = \int d^{4}x a^{3}\left(\frac{1}{2}h\,(u)F(R,T) - \lambda_{1}\left(R - 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right) - u\right) - \right.$$
$$\left. -\lambda_{2}\left(T - 6\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}} - u\right) + Y - V\right). \quad (133)$$

Коэффициент λ_{1} возможно найти из вариации относительно R в виде

$$\lambda_{1} = \frac{h}{2}F_{R.} \quad (134)$$

Аналогично λ_{2} возможно найти из вариации по отношению к T:

$$\lambda_{1} = \frac{h}{2}F_{T.} \quad (135)$$

Действие примет вид

$$S = \int d^{4}xL, \quad (136)$$

где

$$L = \frac{ha^3}{2}(F - TF_T - RF_R + uF_R + vF_R) + 3ha\dot{a}^2(F_T - F_R) -$$
$$-3ha\dot{a}^2\left(\dot{R}F_{RR} - \dot{T}F_{RT}\right) - 3h'(\dot{\overline{\psi}}\psi + \overline{\psi}\dot{\psi})\dot{a}a^2F_R + a^3Y - a^3V. \quad (137)$$

2.2 Уравнения Эйлера-Лагранжа

Наличие лагранжиана позволяет использовать уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\epsilon}} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \epsilon}, \quad (138)$$

где ϵ - обобщенные координаты.

Уравнение Эйлера-Лагранжа для масштабного коэффициента a имеет следующий вид:

$$-\frac{F}{2} + \frac{1}{2}(TF_T + RF_R) - 3H^2(F_T - F_R) + \frac{V}{h} - \frac{Y}{h} + 2\frac{\dot{h}}{h}H(F_T - F_R) +$$
$$+2H(F_{TT}\dot{T}2\dot{H}(F_T - F_R) + F_{TR}\dot{R} + F_{TR}\dot{T} + F_{RR}\dot{R} - 2\frac{\ddot{h}}{h}\left(F_{RR}\dot{R} + T\dot{F}_{TR}\right) -$$
$$-\ddot{R}F_{RR} - F_{RRR}\dot{R}^2 - 2F_{RRR}\dot{R}\dot{T} - \dot{T}^2F_{RTT} - T\ddot{F}_{RT} - \frac{\ddot{h}}{h}F_R = 0. \quad (139)$$

Для скаляра Риччи R:

$$\frac{1}{2}(TF_{TR} + RF_{RR}) - 3\dot{H}F_{RR} - 6H^2F_{RR} - 3H^2F_{TR} = 0. \quad (140)$$

.

Для скалярного кручения T:

$$\frac{1}{2}(TF_{TT} + RF_{RT}) - 3\dot{H}F_{RT} - 6H^2F_{RT} - 3H^2F_{TT} = 0. \quad (141)$$

Энергетическое условие запишем соответственно как

$$E_L = 3H^2(F_T - F_R) - \frac{1}{2}(F - TF_T - RF_R) - \frac{3\dot{h}}{h}HF_R -$$
$$-3H\left(F_{RRR}\dot{R} + \dot{T}F_{RT}\right) + \frac{V}{h} = 0. \quad (142)$$

2.3 Симметрия Нетер

В теоретической физике метод симметрии Нетер является хорошим способом изучения моделей. В частности, это отличный подход для коррекции космологических моделей. Основная идея этого метода заключается в том, что если вариационный интеграл остается инвариантным относительно непрерывной группы, то групповой генератор выдает соответствующий закон сохранения. Чтобы сделать это, рассмотрим бесконечно малый генератор для этой модели

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial R} + \gamma\frac{\partial}{\partial T} + \gamma\frac{\partial}{\partial \psi} + \epsilon\frac{\partial}{\partial \overline{\psi}} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{R}} + \dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{T}} + \\ + \dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} + \dot{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \dot{\overline{\psi}}}. \quad (143)$$

Здесь α, β, γ, δ, являются функциями a, R, T, ψ, $\overline{\psi}$. Их производные по времени соответственно:

$$\dot{\alpha} = \alpha_\alpha\dot{a} + \alpha_R\dot{R} + \alpha_T\dot{T} + \alpha_\psi\psi + \alpha_{\overline{\psi}}\dot{\overline{\psi}}, \quad (144)$$

$$\dot{\beta} = \beta_\alpha\dot{a} + \beta_R\dot{R} + \beta_T\dot{T} + \beta_\psi\psi + \beta_{\overline{\psi}}\dot{\overline{\psi}}, \quad (145)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma_\alpha\dot{a} + \gamma_R\dot{R} + \gamma_T\dot{T} + \gamma_\psi\psi + \gamma_{\overline{\psi}}\dot{\overline{\psi}}, \quad (146)$$

$$\dot{\delta} = \delta_\alpha\dot{a} + \delta_R\dot{R} + \delta_T\dot{T} + \delta_\psi\psi + \delta_{\overline{\psi}}\dot{\overline{\psi}}, \quad (147)$$

$$\dot{\epsilon} = \varepsilon_\alpha\dot{a} + \epsilon_R\dot{R} + \epsilon_T\dot{T} + \epsilon_\psi\psi + \epsilon_{\overline{\psi}}\dot{\overline{\psi}}, \quad (148)$$

Таким образом, можно построить следующую систему уравнений

$$\dot{a}^2: \alpha 3h(F_T - F_R) + \beta 3ha(F_{TR} - F_{RR}) + \gamma 3ha(F_{TT} - F_{RT}) + \alpha_a 6ha(F_T - F_R) \\ -\beta_a 3ha^2F_{RR} - \gamma_a 3ha^2F_{RT} - \delta_a 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \epsilon_a 3h'\overline{\psi}a^2F_R = 0, \quad (149)$$

$$\dot{R}^2: 3\alpha_R ha^2F_{RR} = 0, \quad (150)$$

$$\dot{T}^2: 3\alpha_T ha^2F_{RT} = 0, \quad (151)$$

$$\dot{\psi}^2: \alpha_\psi 3h'a^2F_{R\overline{\psi}} = 0, \quad (152)$$

$$\dot{\overline{\psi}}^2: \alpha_{\overline{\psi}} 3h'a^2F_{R\psi} = 0, \quad (153)$$

$$\dot{a}\dot{R}: -\alpha 6hF_{RR} - \beta 3ha^2F_{RRR} - \gamma 3ha^2F_{RRT} - \alpha_a 3ha^2F_{RR} + \alpha_R 6ha(F_T - F_R) - \\ -\beta_R 3ha^2F_{RR} - \gamma_R 3ha^2F_{RT} - \delta_R 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \epsilon_R 3h'\psi a^2F_R = 0, \quad (154)$$

$$\dot{a}\dot{T}: -\alpha 6hF_{RT} - \beta 3ha^2F_{RRT} - \gamma 3ha^2F_{RTT} - \alpha_a 3ha^2F_{RT} + \alpha_T 6ha(F_T - F_R) - \\ -\beta_T 3ha^2F_{RR} - \gamma_T 3ha^2F_{RT} - \delta_T 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \epsilon_R 3h'\psi a^2F_R = 0, \quad (155)$$

$$\dot{a}\dot{\psi}: -\alpha 6h'\overline{\psi}aF_R - \epsilon_R 3h'\psi a^2F_R - \gamma 3h'a^2F_{RR\overline{\psi}} - \beta 3h'a^2F_{R\overline{\psi}} + \\ +\alpha_R 6ha(F_T - F_R) - \beta_\psi 3ha^2F_{RR} - \gamma_\psi 3ha^2F_{RT} - \delta_\psi 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \\ -\epsilon_{\overline{\psi}} 3h'\psi a^2F_R = 0, \quad (156)$$

$$\dot{a}\dot{\overline{\psi}}: -\alpha 6h'\psi aF_R - \epsilon_R 3h'a^2F_R - \gamma 3h'a^2F_{RT\psi} - \beta 3h'a^2F_{RR\psi} + \\ +\alpha_{\overline{\psi}} 6ha(F_T - F_R) - \beta_{\overline{\psi}} 3ha^2F_{RR} - \gamma_{\overline{\psi}} 3ha^2F_{RT} - \delta_{\overline{\psi}} 3h'\overline{\psi}a^2F_R \\ -\epsilon_{\overline{\psi}} 3h'\psi a^2F_R = 0, \quad (157)$$

$$\dot{R}\dot{T}: \alpha_T 3ha^2F_{RR} - \alpha_\psi 3ha^2F_{RT} = 0, \quad (158)$$

$$\dot{R}\dot{\psi}: \alpha_T 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \alpha_\psi 3ha^2F_{RR} = 0, \quad (159)$$

$$\dot{R}\dot{\overline{\psi}}: \alpha_R 3h'\psi a^2F_R - \alpha_{\overline{\psi}} 3ha^2F_{RR} = 0, \quad (160)$$

$$\dot{T}\dot{\psi}: -\alpha_T 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \alpha_\psi 3ha^2F_{RT} = 0, \quad (161)$$

$$\dot{R}\dot{\psi}: \alpha_T 3h'\overline{\psi}a^2F_R - \alpha_{\overline{\psi}} 3ha^2F_{RT} = 0. \quad (162)$$

Аналогично компоненты $\dot{R}^2$и $\dot{T}^2$ дают два возможных решения. Первое

$$F_{RR} = F_{RR} = 0. \quad (163)$$

В этом случае результатом является модель $F = s_1R + s_2T$, где s_1 и s_2 являются функциями $(\psi, \overline{\psi})$.

Второе возможное решение из

$$\alpha_R = \alpha_R = 0. \quad (164)$$

Это возможно, если α имеет следующий вид $\alpha = \alpha(a)$. Из уравнений для $\dot{a}\dot{R}$ и $\dot{a}\dot{T}$ мы можем найти новую функцию

$$Z(a, \psi, \overline{\psi}) = -(2\alpha - \alpha_\alpha \alpha)F_r - \beta haF_R - \gamma haF_{RT.} \quad (165)$$

Таким образом, можно исключить β и γ, что позволяет получить α

$$\alpha = (\alpha_0 a)^n. \quad (166)$$

Все это дает следующее решение для F

$$F = F_0 (R + T)^n + F_{01}, \quad (167)$$

где F_0 и F_{01} некоторые функции от $\psi, \overline{\psi}$, и n является константой. Одними из решений для масштабного фактора для данных моделей будут являтся следующие

$$a = a_{01}(t_{01}t + t_{02})^g, \quad (168)$$

$$a = a_{02}e^{t_{03}t+t_{04}}, \quad (169)$$

где a_{01}, a_{02}, t_{01}, t_{02}, t_{03}, t_{04}, g – некоторые константы.

В работе исследуется общая модель F(R,T) гравитации, которая взаимодействует с фермионным полем в однородном и изотропном плоском пространстве-времени ФЛРУ. Основная идея и цель проделанной работы состояла в том, чтобы создать математическую модель и найти конкретное решение для масштабного коэффициента a, который описывает динамику эволюции Вселенной. Для расчета использовались уравнения Эйлера-Лагранжа и метод симметрии Нетер. Важно уточнить, что решение дает как степенные, так и экспоненциальные решения. Что описывает ускоренное расширение Вселенной на начальном и нынешнем этапах эволюции Вселенной. Здесь получено решение, которое является следствием гравитационной модели, взятой в наиболее общем виде. Результатом является решение, удовлетворяющее как классической теории Эйнштейна, так и модели Старобинского. Можно сделать вывод, что фермионное поле так же можно рассматривать как возможный фактор эволюции Вселенной и наблюдаемым эффектам.

2.4 Обобщенные модели гравитации F(R,Q)

В этом разделе была изучена расширенная гравитация, а именно гравитация F(R,Q). Для случая пространства-времени ФЛРУ получены лагранжевы, гамильтоновы и гравитационные уравнения. Представлены некоторые частные и обобщенные случаи, а также другие примеры теорий гравитации. ОТО является физически и математически хорошо обоснованной теорией гравитации. Но у нее есть некоторые проблемы, связанные с темной энергией, темной материей, инфляцией. Как вариант эти причины требуют, чтобы ОТО была модифицирована. Ранее мы рассмотрели модель $F(R,T)$ гравитации с k-эссенцией.

В целом обобщением таких модификаций ОТО можно назвать метрик-аффинные теории гравитации (MAG). Почти все известные теории гравитации могут быть получены как частные случаи MAG. Геометрия MAG включает и

нериманову геометрию и обладает не только кривизной, но и кручением, и неметричностью. С геометрической точки зрения можно использовать обобщенную геометрию, называемую метрико-аффинной, в которой аффинная связь априори рассматривается как независимая переменная наряду с метрикой в духе подхода Палатини. Приложения этой геометрии к различным проблемам современной гравитации и космологии привлекают все большее внимание, и было обсуждено приличное количество тем. Примечательно, что в этой геометрии тензор Римана является функцией только связи, будучи свободным от метрики, и, следовательно, может быть ковариантным при локальном конформном преобразовании. Мы рассмотрим частный случай MAG

Действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2k^2}\int \sqrt{-g}d^4x[F(R,T,Q) + 2k^2L_m], \tag{170}$$

где Q - скаляр неметричности.

Хорошо известно, что соответствующая связь может быть разложена в виде

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \check{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\mu\nu} + L^{\rho}_{\mu\nu}, \tag{171}$$

где $\Gamma\check{}^{\rho}_{\mu\nu}$ – Леви -Чевита, $K^{\rho}_{\mu\nu}$ тензор искажения и $L^{\rho}_{\mu\nu}$ тензором деформации

Эти три тензора имеют следующие формы

$$\check{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{lr}\left(\partial_k g_{rj} + \partial_j g_{rk} - \partial_r g_{jk}\right), \tag{172}$$

$$K^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\nu}) = -K^{\rho}_{\nu\mu}, \tag{173}$$

$$L^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(-Q_{\mu\nu\lambda} - Q_{\nu\mu\lambda} + Q_{\lambda\mu\nu}\right) = L^{\rho}_{\nu\mu}, \tag{174}$$

здесь

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}, \tag{175}$$

$$Q_{\rho\mu\nu} = \nabla_{\rho}g_{\mu\nu} \tag{176}$$

являются тензором кручения и тензором неметричности соответственно. В этом общем пространстве-времени с кривизной, кручением и неметричностью давайте введем три геометрических скаляра в виде

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{177}$$

$$T = S^{\mu\nu}_{\rho}T^{\rho}_{\mu\nu}, \tag{178}$$

$$Q = -g^{\mu\nu}\left(L^{\alpha}_{\beta\mu}L^{\beta}_{\nu\alpha} - L^{\alpha}_{\beta\alpha}L^{\beta}_{\mu\nu}\right) = -Q_{\alpha\mu\nu}P^{\alpha\mu\nu}, \quad (179)$$

где R - скаляр кривизны:
T - скаляр кручения и
Q - скаляр неметричности.
Здесь

$$R_{jk} = \partial_i\Gamma^i_{jk} - \partial_j\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^i_{jp}\Gamma^p_{ik}, \quad (180)$$

$$S^{\rho\mu\nu} = K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}T^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu}T^{\sigma\nu}_{\sigma}, \quad (181)$$

$$K^{\nu}_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\left(T^{\nu}_{p\mu} + T^{\nu}_{\mu p} - T^{\nu}_{p\mu}\right). \quad (182)$$

являются тензором Риччи, потенциалом и тензором искажения соответственно. Здесь мы предполагаем, что эти три скаляра имеют следующие формы

$$R = u + R_s, \quad (183)$$

$$T = v + T_s, \quad (184)$$

$$Q = w + Q_s, \quad (185)$$

где $(u = u(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu};\ x_i; g_{ij}; \dot{g}_{ij}; \ddot{g}_{ij}, \dots; f_j)$, $(v = v(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu};\ x_i; g_{ij}; \dot{g}_{ij}; \ddot{g}_{ij}, \dots; g_j)$, и $(w = w(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu};\ x_i; g_{ij}; \dot{g}_{ij}; \ddot{g}_{ij}, \dots; h_j)$, есть некоторые реальные функции. Здесь: i) $R_s = R^{(LC)}$ является скаляр кривизны соответствующим связи Леви-Чивиты с исчезающим кручением и неметричностью ($T = Q = 0$); ii) $T_s = T^{(WC)}$ является скаляром кручения для чисто Вейценбока связи с исчезающей кривизной и неметричностью ($R = Q = 0$); iii) $Q_s = Q^{(NM)}$ скаляр неметричности с исчезающим кручением и кривизной ($R = T = 0$).

Рассмотрим пространство-время ФЛРУ. Плоское пространство-время ФЛРУ описывается метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (186)$$

где $a = a(t)$ масштабный фактор. Ортонормированные компоненты тетрады $e_i(x^{\mu})$ связаны с метрикой посредством

$$g_{\mu\nu} = n_{ij}e^i_{\mu}e^j_{\nu}, \quad (187)$$

где латинские индексы i, 0,...,3 для касательного пространства многообразия, в то время как греческие буквы μ, ν - индексы координат на многообразии, также

проходящие по 0,...,3. С помощью метрики FRW сопоставьте три переменные R_s,T_s,Q_s выглядит как (N = 1)

$$R_s = R^{LC} = 6\left(\dot{H} + 2H^2\right), \tag{188}$$

$$T_s = T^{WC} = -6H^2, \tag{189}$$

$$Q_s = Q^{NM} = 6H^2, \tag{190}$$

где H = $(\ln a)_t$ - параметр Хаббла. Следовательно, эти три скаляра (R,T,Q) метрики- аффинного пространства-времени в случае ФЛРУ принимают следующий вид

$$R = u + 6\left(\dot{H} + 2H^2\right), \tag{191}$$

$$T = v - 6H^2, \tag{192}$$

$$Q = w + 6H^2, \tag{193}$$

где u, v, w есть некоторые реальные функции от $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}; t; a; \dot{a}; \ddot{a}; R_s; T_s; Q_s\ldots$ и так далее.

Действие этой $F(Q,R)$ гравитации читается как

$$S = \frac{1}{2k^2}\int \sqrt{-g}d^4x[F(Q,R) + 2k^2Lm], \tag{194}$$

где T - скаляр кручения.
Для обобщения с k-эссенцией $F(R,Q,X,\varphi)$ гравитация будет иметь следующее действие

$$S = 2\pi^2\int dta^3\begin{Bmatrix} F - \lambda_1\left[R - u - 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{a^2}{a}\right)\right] - \\ -\lambda_2\left[Q - v + 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right] - \lambda_3\left[X - \frac{1}{2}\phi^2\right] \end{Bmatrix}, \tag{195}$$

где u,v функция от $a, \dot{a}$.

Уравнение Эйлер-Лагранджа для этой модели мы записываем в следующим виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial L}{\partial a}, \tag{196}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial R}, \tag{197}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial Q}, \tag{198}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial X}, \tag{199}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \tag{200}$$

$$E_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{T} + \frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\dot{X} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - L = 0. \tag{201}$$

Здесь решения уравнений относительно R, Q и X будут иметь следующий вид

$$R = u - 6(H + 2H), \tag{202}$$

$$Q = v - 6H^2, \tag{203}$$

$$X = \frac{1}{2}\phi^2. \tag{204}$$

Для них лагранжевы множители соответственно запишем как

$$\lambda_1 = F_R;\ \lambda_2 = F_Q;\ \lambda_3 = F_X. \tag{205}$$

Получив таким образом выражение для лагранжиана для этой модели как

$$L = a^3\left[F - (R-u)F_R - (Q-v)F_Q\right] - 6a\dot{a}^2\left[b_1F_R + b_2F_Q\right] - \\ -6a^2\dot{a}\left[\dot{R}F_{RR} + \dot{Q}F_{RQ} + \dot{X}_{RX} + \dot{\phi}F_{R\phi}\right] - a^3F_X\left[X - \frac{1}{2}\phi^2\right], \tag{206}$$

можем перейти к использованию метода Нётер

$$XL = 0. \tag{207}$$

Здесь X уже имеет следующее значение

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial R} + \gamma\frac{\partial}{\partial Q} + \delta\frac{\partial}{\partial X} + \epsilon\frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} +$$

$$+\dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{R}}+\dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{Q}}+\dot{\delta}\frac{\partial}{\partial \dot{X}}+\dot{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}, \tag{208}$$

где функции $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$

$$\dot{a}=\alpha_{\alpha}\dot{a}+\alpha_{R}\dot{R}+\alpha_{Q}\dot{Q}+\alpha_{X}\dot{X}+\alpha_{\varphi}\dot{\varphi}, \tag{209}$$
$$\dot{\beta}=\beta_{\alpha}\dot{a}+\beta_{R}\dot{R}+\beta_{Q}\dot{Q}+\beta_{X}\dot{X}+\beta_{\varphi}\dot{\varphi}, \tag{210}$$

$$\dot{\gamma}=\gamma_{\alpha}\dot{a}+\gamma_{R}\dot{R}+\gamma_{Q}\dot{Q}+\gamma_{X}\dot{X}+\gamma_{\varphi}\dot{\varphi}, \tag{211}$$

$$\dot{\delta}=\delta_{\alpha}\dot{a}+\delta_{R}\dot{R}+\delta_{Q}\dot{Q}+\delta_{X}\dot{X}+\delta a_{\varphi}\dot{\varphi}, \tag{212}$$

$$\dot{\epsilon}=\epsilon_{\alpha}\dot{a}+\epsilon_{R}\dot{R}+\epsilon_{Q}\dot{Q}+\epsilon_{X}\dot{X}+\epsilon_{\varphi}\dot{\varphi}, \tag{213}$$

Таким образом получаем длинное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned}
&6(\alpha\left[F_R-F_Q\right]+\beta a\left[F_{RR}-F_{QR}\right]+\gamma a\left[F_{RQ}-F_{QQ}\right]+\delta a[F_{RX}-F_{QX}]+\epsilon a[F_{R\varphi}-\\
&-F_{Q\varphi}]+2\alpha_a a[F_R-F_Q]+\beta_a a^2F_{RR}+\gamma_a a^2F_{QR}+\delta_a a^2F_{RX}+\epsilon_a a^2F_{R\varphi})\dot{a}^2+\\
&+\dot{R}^2 6\alpha_R a^2F_{RR}+\dot{Q}^2 6\alpha_Q a^2F_{RQ}+\dot{X}^2 6\alpha_X a^2F_{RX}+\dot{\varphi}^2(\epsilon_\varphi a^3F_X+6\alpha_\varphi a^2F_{R\varphi}+\\
&+\alpha\frac{3}{2}a^2F_X+\beta\frac{1}{2}a^3F_{XR}+\gamma\frac{1}{2}a^3F_{XQ}+\delta\frac{1}{2}a^3F_{XX}+\epsilon\frac{1}{2}a^3F_{X\varphi})+\dot{a}\dot{R}6a(\beta\alpha F_{RRR}+\\
&+\gamma\alpha F_{RRQ}+\delta\alpha F_{RRX}+\epsilon\alpha F_{RR\varphi}+2\alpha_R\left[F_R-F_Q\right]+(\alpha_a a+a+2\alpha)F_{RR}+\\
&+\gamma_R aF_{QR}+\delta_R aF_{RX}+\epsilon_R aF_{R\varphi})+\dot{a}Q\dot{6}a(\beta aF_{QRR}+\gamma aF_{QRQ}+\delta aF_{QRX}+\epsilon aF_{QR\varphi}+\\
&+2\alpha_Q[F_R-F_T]++(\alpha_\alpha a+2\alpha+\gamma_Q a)F_{QR}+\beta_Q aF_{RR}+\delta_Q aF_{RX}+\epsilon_Q aF_{R\varphi})+\\
&+\dot{a}\dot{X}6a(2\alpha_X\left[F_R-F_Q\right]+a\beta_X F_{RR}+a\gamma_X F_{QR}+\beta\alpha F_{RXR}+\gamma\alpha F_{RXQ}+\delta\alpha F_{RXX}+\\
&+\epsilon\alpha F_{RX\varphi}+(2\alpha+\alpha_\alpha a+\delta_X a)F_{RX}+\epsilon_X aF_{R\varphi})++\dot{a}\dot{\varphi}6a(2\alpha_\varphi+\left[F_R-F_Q\right]+\\
&+a\beta_\varphi F_{RR}+a\gamma_\varphi F_{QR}+\epsilon_a\frac{a^2}{6}F_X+2\alpha F_{R\varphi}+\beta\alpha F_{R\varphi R}+\gamma\alpha F_{R\varphi T}+\delta\alpha F_{R\varphi X}+\\
&+\epsilon\alpha F_{R\varphi\varphi}+\alpha_\alpha aF_{R\varphi}+\delta_\varphi aF_{RX}+\epsilon_\varphi aF_{R\varphi})+\dot{R}\dot{Q}6a^2\left(\alpha_R F_{QR}+\alpha_Q F_{RR}\right)+\\
&+\dot{R}\dot{X}6a^2(\alpha_X F_{RR}+\alpha_R F_{RX})+6\dot{Q}\dot{X}a^2\left(\alpha_X F_{QR}+\alpha_Q F_{RX}\right)+\dot{R}\dot{\varphi}a^2(6\alpha_\varphi F_{RR}+\\
&+\epsilon_R aF_X+6\alpha_R F_{R\varphi})+\dot{Q}\dot{\varphi}\left(6\alpha_\varphi a^2F_{QR}+\epsilon_Q a^3F_X+6\alpha_Q a^2F_{R\varphi}\right)+\dot{X}\dot{\varphi}(\epsilon_X a^3F_X+\\
&+6\alpha_X a^3F_{X\varphi}+6\alpha_\varphi a^2F_{RX})++3a^2\alpha\left[F-(R-u)F_R-(Q-v)F_Q+\frac{1}{3}a\times\right.\\
&\left.\times\left(u_aF_R+v_aF_Q\right)\right]+\beta a^3[-(R-u)F_{RR}-(Q-v)F_{QR}]+\gamma a^3[-(R-u)F_{RQ}-\\
&-(Q-v)F_{QQ}]+\delta a^3[-(R-u)F_{RX}-(Q-v)F_{QX}]+\epsilon a^3[F_\varphi-(R-u)F_{R\varphi}-\\
&-(Q-v)F_{Q\varphi}+a^3\left[u_{\dot{a}}F_R+v_{\dot{a}}F_Q\right]\left(\dot{a}\alpha_\alpha+\dot{R}\alpha_R+\dot{Q}\alpha_Q+\dot{X}\alpha_X+\dot{\varphi}\alpha_\varphi\right)-\\
&-\left(\alpha 3F_X+\beta\alpha F_{XR}+\gamma\alpha F_{XQ}+\delta\alpha F_{XX}+\epsilon\alpha F_{X\varphi}\right)Xa^2=0.
\end{aligned} \tag{214}$$

Это уравнение распадается на следующую систему

$$\dot{a}^2: (\alpha\left[F_R - F_Q\right] + \beta\alpha\left[F_{RR} - F_{QR}\right] + \gamma\alpha\left[F_{RQ} - F_{QQ}\right] + \delta\alpha\left[F_{RX} - F_{QX}\right] + \left(+\epsilon\alpha\left[F_{R\varphi} - F_{Q\varphi}\right]\right) + \alpha_\alpha 2a\left[F_R - F_Q\right] + \beta_a a^2 F_{RR} + \gamma_a a^2 F_{QR} + \delta_a a^2 F_{RX} + +\epsilon_a a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (215)$$

$$\dot{R}^2: 6\alpha_R a^2 F_{RR} = 0, \quad (216)$$

$$\dot{Q}^2: 6\alpha_Q a^2 F_{RQ} = 0, \quad (217)$$

$$\dot{X}^2: 6\alpha_X a^2 F_{RX} = 0, \quad (218)$$

$$\dot{\varphi}^2: \epsilon_\varphi F_X - 6\frac{\alpha_\varphi}{a} F_{R\varphi} + \alpha\frac{3}{2}a^2 F_X + \beta\frac{1}{2}a^3 F_{XR} + +\gamma\frac{1}{2}a^3 F_{XQ} + \delta\frac{1}{2}a^3 F_{XX} + \epsilon\frac{1}{2}a^3 F_{X\varphi}) = 0, \quad (219)$$

$$\dot{a}\dot{R}: 2\alpha F_{RR} + \beta a F_{RRR} + \gamma a F_{RRQ} + \delta a F_{RRX} + \epsilon a F_{RR\varphi} + 2\alpha_R\left[F_R + F_Q\right] + +\alpha_a a F_{RR} - \beta_R a F_{RR} - \gamma_R \alpha F_{RXT} - \delta_R \alpha F_{QR} - \epsilon_R \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (220)$$

$$\dot{a}\dot{Q}: 2\alpha F_{QR} + \beta a F_{QRR} + \gamma a F_{QRQ} + \delta a F_{QRX} + \epsilon a F_{QR\varphi} + 2\alpha_Q\left[F_R + F_Q\right] + +\alpha_a a F_{QR} - \beta_Q a F_{RR} - \gamma_Q \alpha F_{RQ} - \delta_Q \alpha F_{RX} - \epsilon_Q \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (221)$$

$$\dot{a}\dot{X}: 2\alpha F_{RX} + \beta a F_{RXR} + \gamma a F_{RXQ} + \delta a F_{RXX} + \epsilon a F_{RX\varphi} + \alpha_a a F_{RX\varphi} + \alpha_a a F_{RX} +2\alpha_X\left[F_R + F_Q\right] - a\beta_X F_{RR} - \alpha\gamma_X F_{QR} - \delta_X \alpha F_{RX} - \epsilon_X \alpha F_{R\varphi} = 0, \quad (222)$$

$$\dot{a}\dot{\varphi}: 2\alpha F_{R\varphi} + \beta a F_{R\varphi R} + \gamma a F_{R\varphi Q} + \delta a F_{R\varphi X} + \epsilon a F_{R\varphi\varphi} + \alpha_a a F_{RX\varphi} + \alpha_a a F_{R\varphi} + +2\alpha_\varphi\left[F_R + F_Q\right] - a\beta_\varphi F_{RR} - \alpha\gamma_\varphi F_{QR} - \delta_\varphi \alpha F_{RX} - \epsilon_\varphi \alpha F_{R\varphi} - \epsilon_a\frac{a^2}{6}F_X = 0, \quad (223)$$

$$\dot{R}\dot{Q}: \alpha_R a^2 F_{QR} + \alpha_Q a^2 F_{RR} = 0, \quad (224)$$

$$\dot{R}\dot{X}: \alpha_X a^2 F_{RR} + \alpha_R a^2 F_{RX} = 0, \quad (225)$$

$$\dot{Q}\dot{X}: \alpha_X a^2 F_{QR} + \alpha_Q a^2 F_{RX} = 0, \quad (226)$$

$$\dot{R}\dot{\varphi}: 6\alpha_\varphi a^2 F_{RR} - \epsilon_R a^3 F_X + 6\alpha_R a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (227)$$

$$\dot{Q}\dot{\varphi}: 6\alpha_\varphi a^2 F_{QR} - \epsilon_Q a^3 F_X + 6\alpha_Q a^2 F_{R\varphi} = 0, \quad (228)$$

$$\dot{X}\dot{\varphi}: 6\alpha_X a^2 F_{R\varphi} + 6\alpha_\varphi a^2 F_{RX} - \epsilon_R a^3 F_X = 0, \quad (229)$$

$$3\alpha\left[F-(R-u)F_R-(Q-v)F_Q\right]+\beta a\left[-(R-u)F_{RR}-(Q-v)F_{QR}\right]+$$
$$+\gamma a[-(R-u)F_{RQ}-(Q-v)F_{QQ}]+\delta a[-(R-u)F_{RX}-(Q-v)F_{QX}]+\epsilon a[F_\varphi-$$
$$-(R-u)F_{R\varphi}-(Q-v)F_{Q\varphi}+\dot{a}\alpha_\alpha a\left[u_{\dot{a}}F_R+v_{\dot{a}}F_Q\right]+\dot{\varphi}\alpha_\varphi a\left[u_{\dot{a}}F_R+v_{\dot{a}}F_Q\right]+$$
$$+\dot{R}\alpha_R a\left[u_{\dot{a}}F_R+v_{\dot{a}}F_Q\right]+\dot{Q}\alpha_Q a\left[u_{\dot{a}}F_R+v_{\dot{a}}F_Q\right]+\dot{X}\alpha_X a\left[u_{\dot{a}}F_R+v_{\dot{a}}F_Q\right]-$$
$$-\left(\alpha 3F_X+\beta\alpha F_{XR}+\gamma\alpha F_{XQ}+\delta\alpha F_{XX}+\epsilon\alpha F_{X\varphi}\right)X=0. \quad (230)$$

Решим эту систему аналогично тому как была ранее решена подобная система для модели *F(R,Q,X,φ)*. Первое решение здесь линейное, которое можно назвать “классическим”.

$$F_{RR}=F_{RQ}=F_{RX}=0, \quad (231)$$

Опять же для случаев, когда *F(R,Q,X,φ)* не имеет линейного решения, мы получим систему, приводящую к уравнению Монжа-Ампера, и в том числе к квадратичному решению.

$$\dot{a}\dot{R}:\left[\beta F_{RR}+\gamma F_{RQ}+\delta F_{RX}+\epsilon F_{R\varphi}\right]^2=\frac{-12\alpha a F_{RR}-6\alpha_\alpha a^2 F_{RR}}{6a^2}, \quad (232)$$

$$\beta F_{RR}+\gamma F_{RQ}+\delta F_{RX}+\epsilon F_{R\varphi}=\frac{-12\alpha a F_{RR}-6\alpha_\alpha a^2 F_{RR}+const}{6a^2}, \quad (233)$$

$$\dot{a}\dot{Q}:\left[\beta F_{RR}+\gamma F_{RQ}+\delta F_{RX}+\epsilon F_{R\varphi}\right]_Q=\frac{-12\alpha a F_{RQ}-6\alpha_\alpha a^2 F_{RQ}}{6a^2}, \quad (234)$$

$$\beta F_{RR}+\gamma F_{RQ}+\delta F_{RX}+\epsilon F_{R\varphi}=$$
$$\frac{-12\alpha_\varphi a[F_R-F_Q]-12\alpha a F_{R\varphi}-6\alpha_\alpha a^2 F_{R\varphi}}{6a^2}, \quad (235)$$

$$\dot{a}\dot{X}:\left[\beta F_{RR}+\gamma F_{RQ}+\delta F_{RX}+\epsilon F_{R\varphi}\right]_X=\frac{-12\alpha a F_{RQ}-6\alpha_\alpha a^2 F_{RQ}}{6a^2}, \quad (236)$$

$$\dot{a}^2=6a^2\left[F_R-F_Q\right]-12\alpha_\alpha a\left[F_R-F_Q\right]-6a[\beta F_{RQ}+\gamma F_{QQ}+\delta F_{QX}+\epsilon F_{Q\varphi}], \quad (237)$$

$$\dot{\varphi}^2:\epsilon_\varphi a^3F_X-6\alpha_\varphi a^2F_{R\varphi}+\alpha\frac{3}{2}a^2F_X+\beta\frac{1}{2}a^3F_{XR}+\gamma\frac{1}{2}a^3F_{XQ}+$$
$$+\delta\frac{1}{2}a^3F_{XX}+\epsilon\frac{1}{2}a^3F_{X\varphi}=0, \quad (238)$$

$$\dot{R}\dot{\varphi}:\epsilon_\varphi a^3F_X=6\alpha_\varphi a^2F_{RR}, \quad (239)$$

$$\dot{Q}\dot{\varphi}:\epsilon_Q a^3F_X=6\alpha_\varphi a^2F_{RQ}, \quad (240)$$

$$\dot{X}\dot{\varphi}\colon \epsilon_X a^3 F_X = 6\alpha_\varphi a^2 F_{RX,} \tag{241}$$

$$\epsilon_R = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RR}}{F_X}, \tag{242}$$

$$\epsilon_Q = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RQ}}{F_X}, \tag{243}$$

$$\epsilon_R = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RX}}{F_X}, \tag{244}$$

$$\epsilon_{RQ} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RRX}F_X - F_{RR}F_{XQ}}{{F_X}^2}, \tag{245}$$

$$\epsilon_{RX} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RRX}F_X - F_{RR}F_{XQ}}{{F_X}^2}, \tag{246}$$

$$\epsilon_{QR} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RQR}F_X - F_{RQ}F_{XR}}{{F_X}^2}, \tag{247}$$

$$\epsilon_{QX} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RQX}F_X - F_{RQ}F_{XX}}{{F_X}^2}, \tag{248}$$

$$\epsilon_{XR} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RXR}F_X - F_{RX}F_{XR}}{{F_X}^2}, \tag{249}$$

$$\epsilon_{XQ} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RXQ}F_X - F_{RX}F_{XQ}}{{F_X}^2}, \tag{250}$$

$$\epsilon_{RQ} = \epsilon_{QR}\colon \tag{251}$$

$$6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RRQ}F_X - F_{RX}F_{XQ}}{{F_X}^2} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RQR}F_X - F_{RQ}F_{XR}}{{F_X}^2}, \tag{252}$$

$$F_{RX}F_{XQ} = F_{RQ}F_{XR}, \tag{253}$$

$$\epsilon_{QX} = \epsilon_{XQ}\colon, \tag{254}$$

$$6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RQX}F_X - F_{RQ}F_{XX}}{{F_X}^2} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RXQ}F_X - F_{RX}F_{XQ}}{{F_X}^2}, \tag{255}$$

$$F_{RQ}F_{XX} = F_{RX}F_{XQ}, \tag{256}$$

$$\epsilon_{QX} = \epsilon_{XQ}: \tag{257}$$

$$6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RRX}F_X - F_{RR}F_{XX}}{{F_X}^2} = 6\frac{\alpha_\varphi}{a}\frac{F_{RXR}F_X - F_{RX}F_{XR}}{{F_X}^2}, \tag{258}$$

$$F_{RR}F_{XX} = F_{RX}F_{XR}, \tag{259}$$

$$\frac{\epsilon_{\mathrm{R}}}{\mathrm{F_{RR}}} = \frac{\epsilon_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{F_{RQ}}} = \frac{\epsilon_{\mathrm{X}}}{\mathrm{F_{RX}}} = -\frac{6\alpha_\varphi}{\alpha \mathrm{F_X}}, \tag{260}$$

$$F_{RR}F_{XQ} = F_{RQ}F_{RX,} \tag{261}$$

$$F_{RQ}F_{XX} = F_{RX}F_{Q,} \tag{262}$$

$$F_{RR}F_{XX} = F_{RX}^2. \tag{263}$$

Полученное решение предполагает широкий выбор возможных решений. В частности, ранее были проанализированы геометрические свойства равновесного многообразия черных дыр. Рассмотрены основные составляющие формализма геометротермодинамики и представлена термодинамика для анализа равновесного многообразия конфигураций черных дыр. Показано, что проявление кривизны рассматриваемой черной дыры с происходящими в ней фазовыми переходами демонстрирует ее поведение в гравитационном поле.

Для апробации работы по наблюдательным данным взяли частный случай модели.

$$F = (c_1R + c_2X)^n + c_3R - c_4X + c_5. \tag{264}$$

Здесь необходимо отметить следующий момент. Рассматриваемой сейчас уравнение не есть обязательно следствие симметрии модели. Она вполне может быть как линейной, например классическим ОТО, так и возможно отбросить только некоторые составные части модели, оставив их линейными или наоборот только в виде какой либо функции от соответствующего аргумента. Рассматриваемые нами ниже приложения теории сделаны только для каких то частных случаев, чтоб показать непротиворечивость модели наблюдательным данным.

Примем условие медленного скатывание в следующем виде: $\ddot{\varphi} \ll H\dot{\varphi}$. Тогда уравнение Эйлера - Лагранжа по скалярному полю, в частности, сводится к уравнению n=1,2

$$\dot{H}(c_1c_2(8n-2) + 6c_1c_4) + 12c_1H^2(c_2n + c_4) + c_2\dot{\varphi}\left(\frac{2c_2}{n} + \frac{c_4}{2}\right) = 0. \tag{265}$$

В частности, примем $c_2 = 0$ и $\varphi = \varphi_0 t + \varphi_{01}$, что дает нам решение уравнения Эйлера-Лагранжа в виде:

$$H = \frac{1}{c_{02}(t - t_0)}, \tag{266}$$

$$n = 2, \tag{267}$$

$$c_{02} \approx 0{,}1919. \tag{268}$$

Параметры медленного скатывания примут следующий вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\dot{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}^2} = -\mathrm{c}_{02}, \tag{269}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\ddot{\varphi}}{\mathrm{H}\varphi} = 0, \tag{270}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\dot{\mathrm{f}}_\mathrm{R}}{2\mathrm{H}\mathrm{f}_\mathrm{R}} = -\mathrm{c}_{02}\,(n-1), \tag{271}$$

$$\varepsilon_4 = 0. \tag{272}$$

Спектральный индекс $\mathrm{n_s}$, который описывает наклон первичного спектра возмущений плотности в модели ранней Вселенной.

Спектральный индекс $\mathrm{n_s}$, описывающий наклон первичного спектра возмущений плотности в модели ранней Вселенной, можно выразить через параметры ε_i, характеризующие эволюцию возмущений. В общем случае, спектральный индекс определяется как:

$$\mathrm{n_s} = \frac{4\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - 2\epsilon_4}{1 + \epsilon_1} = 0{,}966 \tag{273}$$

Используя выражения для параметров ε_i, представленные в формулах (269)-(272), мы приходим к значению $\mathrm{n_s}$=0.966, которое соответствует наблюдательным данным и указывает на согласованность теоретической модели с эмпирическими измерениями.

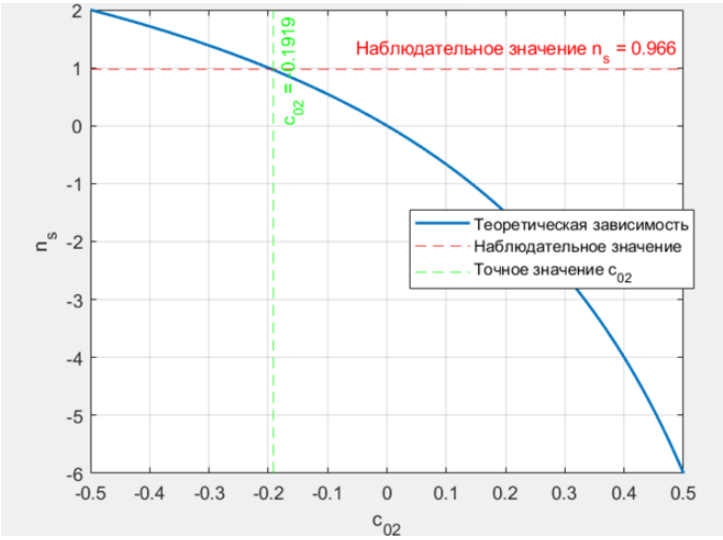


Рисунок 7 - Показано, что точные значения для c_{02},при котором n_sсовпадает с наблюдательными данными.

Другим примером рассмотрим задачу Шваршильда для *F(R,X,φ)* модели. В общем виде следует рассматривать метрику модели как

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + M(r)(d\theta^2 + sin\,\theta^2\, d\varphi^2). \qquad (274)$$

В этом случае скаляр кривизны примет в общем случае следующий вид [56]

$$R = -\frac{1}{B}\left(\frac{A''}{A} + 2\frac{M''}{M} - \frac{A'B'}{2AB} + \frac{A'M'}{2AM} - \frac{M'B'}{MB} - \frac{A'^2}{2A^2} - \frac{M'^2}{2M^2} - \frac{2B}{M}\right), \qquad (275)$$

примем здесь $A(r)d = B(r)^{-1}$, $M(r) = r^2$.

В продолжении сделанного выше предположения, где $F = (c_1R + c_2X)^2 + c_3R + c_4X + c_5$, и $\varphi = \varphi_0 r + \varphi_{01}$, нами было получено решение в приближенном виде для данной модели

$$\mathrm{A(r)} = 1 - \frac{2\mathrm{G_0M_0}}{\mathrm{r}}\left(1 + \frac{2\mathrm{G_0^2M_0^2}\varepsilon}{6\mathrm{r}}\right)^{-3}. \qquad (276)$$

Это позволило нам протестировать модель на эффекте слабого гравитационного линзирования черных дыр.

Выводы по второму разделу

Мы исследовали обобщенные гравитационную модели. Было показано, что ранее полученное решение уравнение МА подходит как решение и к моделям с фермионными полями (f -эссенция). К такому же решению сводится обобщенная модель F(R,Q) гравитации и k – эссенции. Основной целью являлось построение математической модели для описания эволюции Вселенной и нахождение конкретного решения для масштабного фактора. Кроме того, нами были найдены значения параметров, при которых теоретическая модель соответствует наблюдательным данным, что подтверждает её согласованность с эмпирическими результатами и применимость для описания динамики ранней Вселенной в рамках выбранной теории.

3 СОЛИТОННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В математике и физике одной из главных задач является соотношение дифференциальной геометрии и нелинейных дифференциальных уравнений, что означает, что изучение частных случаев подмногообразий, кривых и поверхностей имеет большое значение [57-59]. Поверхности солитонов, связанные с интегрируемой системой, играют существенную роль во многих задачах физического применения. В этой главе мы изучаем сложное модифицированное уравнение Кортевега−де Фриза (cmKdV) [60-64]. Хорошо известно, что уравнение cmKdV является очень важным интегрируемым уравнением. Мы представляем взаимосвязь между интегрируемой системой и солитонными поверхностями, и именно слабое представление уравнения cmKdV было использовано для получения первой и второй фундаментальных форм, площади поверхности и кривизны [65-67]. Термин солитон - получил свое название от слова уединенная волна, которое представляет собой локализованную волну, возникающую в результате баланса между нелинейными и дисперсионными эффектами. Несмотря на первоначальные исследования, концепция уединенной волны не могла получить большого признания в течение многих лет. Кортевег−де Фриз (1895) разработал математическую модель для задачи о мелководье и показал возможность возникновения одиночной волны. Позже изучение уединенных волн началось в середине 1960-х годов, когда Забуски и Крускал обнаружили стабильное поведение, подобное поведению частицы в уединенных волнах. Ранее рассматривалось реальное модифицированное уравнение Кортевега−де Фриза. Здесь мы рассмотрели сложное модифицированное уравнение Кортевега−де Фриза. Солитон – это структурно устойчивая уединенная волна, распространяющаяся в нелинейной среде. Солитоны ведут себя как частицы при взаимодействии друг с другом, они не разрушаются, а продолжают двигаться, сохраняя свою структуру неизменной. Поиск решений для сложных модифицированных систем Кортевега-де Фриза (cmKdV) имеет большое значение, поскольку решения помогают хорошо понять сложные [68-72]:

$$q_t + q_{xxx} - 6qrq_x = 0, \tag{277}$$

$$r_t + r_{xxx} - 6rqr_x = 0, \tag{278}$$

механизмы физических явлений и динамических процессов. Нелинейными уравнениями в частных производных являются уравнения cmKdV. Начнем со связанных уравнений cmKdV вида

Мы представляем $q = r*$ уравнение (277)-(278) имеет следующий вид:

$$q_t + q_{xxx} + 6|q|^2 q_x = 0. \tag{279}$$

где q (x, t) - отклонение формы волны на поверхности воды от положения равновесия зависит от координаты x и времени t. Индексы характеристической функции q означают соответствующие производные относительно t и x. Это уравнение является уравнением в частных производных. Исследуемая характеристика в данном случае q зависит от координаты x и времени t. Решить уравнение такого типа означает найти зависимость q от x и t, после подстановки ее в уравнение мы приходим к определению модифицированных уравнений Кортевега-де Фриза, которые будут представлены в этом разделе. Упрощенное представление уравнений mkdv имеет следующий вид:

$$\psi_x = M\psi, \tag{280}$$

$$\psi_t = N\psi, \tag{281}$$

где ψ-вектор

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{282}$$

и M,N матрицы

$$M = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ r & i\lambda \end{pmatrix}, \tag{283}$$

$$N = V_3\,\lambda^3 + V_2\,\lambda^2 + V_1\,\lambda^1 + V_0, \tag{284}$$

здесь

$$V_3 = \begin{pmatrix} -4i & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix}, \tag{285}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4q \\ 4r & 0 \end{pmatrix}, \tag{286}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2iqr & 2iq_x \\ -2ir_x & 2iqr \end{pmatrix}, \tag{287}$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} -qr_x + q_x r & -r_{xx} + 2q^2 r \\ -r_{xx} + 2qr^2 & qr_x - q_x r \end{pmatrix}. \tag{288}$$

где λ - комплексный параметр собственных значений.

3.1 Фундаментальные формы уравнения Кортевега-де Фриза

В этой части мы использовали первую и вторую фундаментальную форму для нахождения поверхностей солитонов и использовали формулу Сима Тафеля [73-75]. Формула Сима Тафеля показывает связь между теорией солитонов и классической геометрией. Нахождение солитонных поверхностей важно при

решении интегрируемой геометрии. Геометрические объекты, связанные с солитонными поверхностями, могут быть связаны с решениями некоторых нелинейных моделей. Используя формулу Сима-Тафеля [76, 77]:

$$r = \psi^{-1}\psi, \tag{289}$$

$$r_x = \psi^{-1}M_\lambda\psi, \tag{290}$$

$$r_t = \psi^{-1}N_\lambda\psi, \tag{291}$$

где

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tag{292}$$

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} -12i\lambda^2 - 2iqr & 8q\lambda + 2iq_x \\ 8r\lambda - 2ir_x & 12i\lambda^2 + 2iqr \end{pmatrix}. \tag{293}$$

Независимо от того, являются ли параметры (x,t) независимыми аргументами или какими-либо функциями других независимых аргументов, общая разность dr радиус-вектора r текущей точки поверхности представляется в виде (векторной) инвариантной линейной дифференциальной формы:

$$dr = r_x dx + r_t dt. \tag{294}$$

Которая является скалярной квадратичной дифференциальной формой, обладает тем же свойством инвариантности:

$$dr^2 = drdt = r_x^2 dx^2 + 2r_x r_t dxdt + r_t^2 dt^2. \tag{295}$$

В развернутом виде мы можем написать в следующей форме:

$$I = Edx_2 + 2Fdxdt + Gdt_2, \tag{296}$$

где E, F, G – первая квадратичная форма, определяемая из ранее полученного выражения:

$$E = r_x^2; F = r_x r_t; G = r_t^2, \tag{297}$$

где

$$r_x = \Phi^{-1}M_\lambda\Phi, \tag{298}$$

$$r_t = \Phi^{-1}N_\lambda\Phi, \tag{299}$$

$$r_x r_t = \Phi^{-1}M_\lambda N_\lambda\Phi, \tag{300}$$

$$\vec{r}_x^2 = -\frac{1}{2} tr(r_x^2), \tag{301}$$

$$\vec{r}_t^2 = -\frac{1}{2} tr(r_t^2), \tag{302}$$

$$\vec{r}_x \vec{r}_t = -\frac{1}{2} tr(\vec{r}_x \vec{r}_t), \tag{303}$$

Рассмотрим двумерную поверхность:

$$r_x^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{304}$$

мы нашли trace

$$tr(\vec{r}_x^2) = -2, \tag{305}$$

$$\mathrm{r_t^2} = \begin{pmatrix} -144\lambda^4 - 48\lambda^4 \mathrm{qr} - 4\mathrm{q^2 r^2} + 64\lambda^2 \mathrm{qr} - 16\mathrm{q}\lambda \mathrm{ir_x} + 16\mathrm{q_x}\lambda \mathrm{ir} + 4\mathrm{q_x r_x} - \\ -19\mathrm{iq}\lambda^3 + 24\lambda^2 \mathrm{q_x} - 16\mathrm{iq^2 r}\lambda + 4\mathrm{rqq_x} + 96\mathrm{qi}\lambda^3 + 16\mathrm{iq^2}\lambda \mathrm{r} - 24\lambda^2 \mathrm{q_x} - 4 \\ -96\mathrm{ri}\lambda^3 - 16\mathrm{ir^2 q} - 24\lambda^2 \mathrm{r_x} - 4\mathrm{qrr_x} + 96\mathrm{ri}\lambda^3 + 16\mathrm{ir^2}\lambda \mathrm{q} - 24\lambda^2 \mathrm{r_x} - 4\mathrm{qrr_x} \\ 64\lambda^2 \mathrm{qr} + 16\mathrm{r}\lambda \mathrm{iq_x} - 16\mathrm{q_x}\lambda \mathrm{ir} + 4\mathrm{q_x r_x} - 144\lambda^4 - 48\lambda^2 \mathrm{qr} - 4\mathrm{q^2 r^2} \end{pmatrix}, \tag{306}$$

$$\begin{gathered} tr(\vec{r}_t^2) = -8q^2 r^2 - 32qr\lambda^2 + 64rq\lambda^2 - 288\lambda^4 \\ +32r\lambda i q_x - 32r\lambda i r_x + 8q_x r_x, \end{gathered} \tag{307}$$

$$r_x r_t = \begin{pmatrix} -12\lambda^2 - 2\mathrm{qr} & 8iq\lambda - 2r_x \\ 8ir\lambda + 2r_x & -12\lambda^2 - 2\mathrm{qr} \end{pmatrix}, \tag{308}$$

$$tr(\vec{r}_t^2) = -4qr - 24\lambda^2. \tag{309}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(tr\left(M_\lambda^2\right)dx^2 + 2tr(M_\lambda N_\lambda)dxdt + tr\left(N_\lambda^2\right)dt^2\right), \tag{310}$$

где

$$tr\left(M_\lambda^2\right) = -2 \tag{311}$$

$$tr(M_\lambda N_\lambda) = -4qr - 24\lambda^2. \tag{312}$$

Подставляя уравнения (311) и (312) в уравнение (310), получаем

$$\begin{gathered} I = dx^2 - [-24i\lambda^2 - 4qr]dxdt + \\ +[-8q^2 r^2 - 32qr\lambda^2 + 64rq\lambda^2 - 288\lambda^4 + 32r\lambda i q_x - 32q\lambda i r_x + 8q_x r_x]dt. \end{gathered} \tag{313}$$

Вторая квадратичная форма (или вторая фундаментальная форма) поверхности представляет собой квадратичную форму на касательном расслоении поверхности, которая, в отличие от первой квадратичной формы, определяет внешнюю геометрию поверхности вблизи этой точки:

$$II = -[(\vec{r}_{xx}\vec{n})dx^2 + (2\vec{r}_{xt}\vec{n})dxdt + (\vec{r}_{tt}\vec{n})dt^2], \tag{314}$$

где

$$\vec{r}_{xx}\vec{n} = -\frac{1}{2}tr(r_{xx}n), \tag{315}$$

$$\vec{r}_{tt}\vec{n} = -\frac{1}{2}tr(r_{tt}n), \tag{316}$$

$$\vec{r}_{xt}\vec{n} = -\tfrac{1}{2}tr(r_{xt}n). \tag{317}$$

Мы вводим обозначение

$$e = \vec{r}_{xx}\vec{n}; \quad f = \vec{r}_{tt}\vec{n}; \quad g = \vec{r}_{xt}\vec{n}, \tag{318}$$

Далее, используя уравнения Сим Тафеля, мы находим:

$$r_{xx} = \Phi^{-1}M_{\lambda x}\Phi + \Phi^{-1}\left[M_{\lambda,}M\right]\Phi, \tag{319}$$

$$r_{xt} = \Phi^{-1}M_{\lambda t}\Phi + \Phi^{-1}\left[M_{\lambda,}N\right]\Phi, \tag{320}$$

$$r_{tt} = \Phi^{-1}M_{\lambda t}\Phi + \Phi^{-1}\left[N_{\lambda,}N\right]\Phi, \tag{321}$$

мы определяем нормаль

$$n = \frac{\Phi - 1\ [M_\lambda, N]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2}tr(\ [M_\lambda, N])^2}}\,. \tag{322}$$

Вторая фундаментальная форма имеет следующий вид:

$$e = -\frac{1}{2}\frac{tr\big((M_{\lambda x} + [M_\lambda, M])[M_\lambda, N_\lambda]\big)}{\sqrt{\frac{1}{2}tr([M_\lambda, N_\lambda]^2)}}, \tag{323}$$

$$f = -\frac{1}{2}\frac{tr\big((M_{\lambda t} + [M_\lambda, N])[M_\lambda, N_\lambda]\big)}{\sqrt{\frac{1}{2}tr([M_\lambda, N_\lambda]^2)}}, \tag{324}$$

$$g = -\frac{1}{2}\frac{tr\left((N_{\lambda t} + [N_\lambda, N])[M_\lambda, N_\lambda]\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}tr([M_\lambda, N_\lambda]^2)}}, \quad (325)$$

Далее из уравнения [323]- [325]находим коммутаторы:

$$[M_{\lambda,} M] = \begin{pmatrix} 0 & -2iq \\ 2ir & 0 \end{pmatrix}, \quad (326)$$

$$[M_{\lambda,} N_\lambda] = \begin{pmatrix} 0 & -2i(8q\lambda + 2q_x) \\ 2i(8r\lambda - 2r_x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (327)$$

$$[M_{\lambda,} N] = \begin{pmatrix} 0 & -8\lambda^2 i + 4q_x\lambda + 2q_{xx}i - 4q^2 ri \\ 8\lambda^2 i + 4r_x\lambda - 2r_{xx}i + 4r^2 qi & 0 \end{pmatrix}, \quad (328)$$

$$M_{\lambda x} = 0, \quad (329)$$

$$M_{\lambda t} = 0, \quad (330)$$

$$N_{\lambda t} = \begin{pmatrix} -2i(rq_t + qr_t) & 8q\lambda q_t + 2iq_{xt} \\ 8\lambda r_t - 2ir_{xt} & 2i(rq_t + qr_t) \end{pmatrix}, \quad (331)$$

подставляем (329)-(331) и можем получить вторую фундаментальную форму в следующем виде:

$$II = 1\text{-}8q^2r^2 - 32qr\lambda^2 + 64rq\lambda^2 - 288\lambda^4 + \\ +32r\lambda iq_x - 32q\lambda ir_x + 8q_x r_x, \quad (332)$$

Площадь поверхности является одной из фундаментальных характеристик в дифференциальной геометрии и широко используется при решении прикладных задач в физике, инженерии и математическом моделировании. Для вычисления площади поверхность разбивается на области с кусочно-гладкими границами, каждая из которых ортогонально проецируется на подходящую плоскость. Суммирование площадей этих проекций обеспечивает приближённое значение, а точная площадь определяется как верхняя граница таких сумм.

Если поверхности в евклидовом пространстве задана параметрическая функция r(x, t), где - параметры x,t в области D на поверхности x, t, то площадь S может быть выражена в виде двойного интеграла:

$$S = \iint |\vec{r}_x \times \vec{r}_t| dxdt, \quad (333)$$

r_x, r_t – частные производные

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_t| = \sqrt{\vec{r}_x^2 \vec{r}_t^2 - (\vec{r}_x \vec{r}_t)^2} \tag{334}$$

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_t| = \sqrt{EG - F^2} \tag{335}$$

Мы можем переписать

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dxdt \tag{336}$$

где:

$$E = \frac{1}{2} tr(r_x^2) = \frac{1}{2} tr\left(M_\lambda^2\right) = 1, \tag{337}$$

$$G = \frac{1}{2} tr(r_t^2) = \frac{1}{2} tr\left(N_\lambda^2\right) = -8q^2r^2 - 32qr\lambda^2 + 64rq\lambda^2 - 288\lambda^4 + \\ +32r\lambda i q_x - -32q\lambda i r_x + 8q_x r_x, \tag{338}$$

$$F = \frac{1}{2} tr(r_{xt}) = \frac{1}{2} tr(M_\lambda N_\lambda) = 0, \tag{339}$$

$$S = \iint -8q^2r^2 - 32qr\lambda^2 + 64rq\lambda^2 - 288\lambda^4 + 32r\lambda i q_x - \\ -32r\lambda i r_x + 8q_x r_x dt. \tag{340}$$

В этой работе было исследовано сложное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (КмКдВ) с целью изучения геометрических характеристик солитонных поверхностей. Для обеспечения интегрируемости системы была введена пара Лакса, что позволило анализировать одномерные поверхности, связанные с решениями уравнения. Основное внимание уделено вычислению первой и второй фундаментальных форм с использованием формул Сима–Тафеля, что обеспечивает удобный инструмент для исследования геометрии таких поверхностей [78].

Целью работы является построение солитонных поверхностей на основе комплексного модифицированного уравнения КмКдВ, которое демонстрирует свойства солитонных решений. Для этого была подробно исследована первая квадратичная форма, которая используется в вычислении первой и второй фундаментальных форм с применением формул Сима–Тафеля. С использованием идей Гаусса были получены внутренние геометрические характеристики поверхности, включая вычисление гауссовой и средней кривизны, а также площади поверхности. Дополнительно исследованы длина кривых на поверхности и углы между ними, что позволило более глубоко описать структуру геометрических объектов, связанных с солитонными решениями.

Применённые методы и результаты демонстрируют эффективность использования геометрических подходов для анализа интегрируемых систем и предоставляют новые возможности для изучения их свойств. Мы начнем с уравнений кмКдВ вида [79, 80].

$$q_t + q_{xxx} - 6qrq_x = 0, \tag{341}$$

$$r_t + r_{xxx} - 6rqr_x = 0, \tag{342}$$

$$q_t + q_{xxx} + 6|q|^2 q_x = 0, \tag{343}$$

Пара Лакса для уравнений кмКдВ [81-83]

$$\psi_x = M\psi, \tag{344}$$

$$\psi_t = N\psi, \tag{345}$$

где ψ -вектор

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{346}$$

и M,N матрицы

$$M = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ r & i\lambda \end{pmatrix}, \tag{347}$$

$$N = V_3\lambda^3 + V_2\lambda^2 + V_1\lambda + V_0, \tag{348}$$

здесь

$$V_3 = \begin{pmatrix} -4i & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix}, \tag{349}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4q \\ 4r & 0 \end{pmatrix}, \tag{350}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2iqr & 2iq_x \\ -2ir_x & -2iqr \end{pmatrix}, \tag{351}$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} -qr_x + q_x r & -q_{xx} + 2q^2 r \\ -r_{xx} + 2r^2 q & qr_x - q_x r \end{pmatrix}, \tag{352}$$

где λ - комплексный параметр собственных значений.

Формула Сима Тафеля, которую мы использовали для нахождения солитонных поверхностей с первой и второй фундаментальными формами.

Формула Сима-Тафеля:

$$r = \Phi^{-1}\Phi_{\lambda}, \tag{353}$$

мы находим следующий:

$$r_x = \Phi^{-1}\mathrm{M}_{\lambda}\Phi, \tag{354}$$

$$r_t = \Phi^{-1}\mathrm{N}_{\lambda}\Phi, \tag{355}$$

где

$$M_{\lambda} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tag{356}$$

$$N_{\lambda} = \begin{pmatrix} -12i\lambda^2 - 2iqr & 0 \\ 8r\lambda - 2ir_x & i \end{pmatrix}, \tag{357}$$

Расширенный вид первой и второй фундаментальной формы имеет следующий вид

$$I = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2, \tag{358}$$

$$II = edx^2 + 2fdxdt + gdt^2, \tag{359}$$

здесь

$$E = -1, \tag{360}$$

$$G = -8q^2r^r + 8q_xr_x + 32iq_xr\lambda - 32iqr_x\lambda + 32qr\lambda^2 - 288\lambda^4, \tag{361}$$

$$F = -4qr - 24\lambda^2, \tag{362}$$

затем мы нашли первую фундаментальную форму

$$\begin{gathered} I = dx^2 - [-24i\lambda^2 - 4qr]dxdt + \\ +[-8q^2r^2 - 32qr\lambda^2 - 32qr\lambda^2 + 64rq\lambda^2 - 288\lambda^4 + \\ +32r\lambda iq_x - 32q\lambda ir_x + 8q_xr_x]dt. \end{gathered} \tag{363}$$

Первая квадратичная форма поверхности неотрицательна, поскольку ее дискриминант всегда больше нуля.

$$EG - F^2 = \vec{r}_x^2\vec{r}_t^2 - (\vec{r}_x\vec{r}_t)^2 = ([\vec{r}_x\vec{r}_t])^2 > 0, \tag{364}$$

метрика поверхности

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2. \quad (365)$$

Если мы знаем первую квадратичную форму поверхности, мы можем вычислить на поверхности длину кривых, углы и площадь. Длину кривой на поверхности можно найти, дифференцируя длину дуги этой кривой, и мы получим:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2}, \quad (366)$$

Угол между кривыми на поверхности

$$d\vec{r} = \vec{r}_x dx + \vec{r}_t dt, \quad (367)$$

$$\delta\vec{r} = \vec{r}_x \delta x + \vec{r}_t \delta t, \quad (368)$$

следовательно, желаемый угол

$$cos\omega = \frac{d\vec{r}, \delta\vec{r}}{\sqrt{d\vec{r}^2}\sqrt{\delta\vec{r}^2}}, \quad (369)$$

где

$$d\vec{r}^2 = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2, \quad (370)$$

$$\delta\vec{r}^2 = E\delta x^2 + 2F\delta x\delta t + G\delta t^2, \quad (371)$$

$$d\vec{r}\delta\vec{r} = Edx\delta x + F(dx\delta t + dt\delta x) + Gdt\delta t, \quad (372)$$

что дает нам

$$cos\omega = \frac{Edx\delta x + F(dx\delta t + dt\delta x) + Gdt\delta t}{\sqrt{Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2}\sqrt{E\delta x^2 + 2F\delta x\delta t + G\delta t^2}}, \quad (373)$$

мы получаем выражение координатного угла, то есть для прямых мы имеем

$$dx \neq 0;\ dt = 0;\ \delta x = 0;\ \delta t \neq 0, \quad (374)$$

тогда

$$cos\omega = \frac{Fdx\delta t}{\sqrt{Edx^2}\sqrt{G\delta t^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad (375)$$

$$sin\omega = \sqrt{1 - cos^2\omega} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \qquad (376)$$

и отсюда мы получаем

$$cos\omega = \frac{-4qr - 24\lambda^2}{\sqrt{8q^2r^2 - 8q_xr_x - 32iq_xr\lambda + 32iqr_x\lambda - 32qr\lambda^2 + 288\lambda^4}}, \qquad (377)$$

$$sin\omega = \sqrt{\frac{-q^2r^2 + 108\lambda^4 - q_x(r_x + 4ir\lambda) + 4q\lambda(ir_x + 5r\lambda)}{q^2r^2 + 36\lambda^4 + 4iq\lambda(r_x + ir\lambda) - q_x(r_x + 4ir\lambda)}}. \qquad (378)$$

Из результата мы видим, что на этой поверхности угол между двумя кривыми зависит только от отношения дифференциальных криволинейных координат, взятых вдоль кривых в точках их пересечения.

В данной работе проведено исследование сложного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (KdV) с использованием методов дифференциальной геометрии. Основное внимание уделено анализу его геометрических свойств через первую фундаментальную форму. В процессе исследования были построены зависимости между коэффициентами уравнения и геометрическими характеристиками внутренних поверхностей, возникающих при моделировании нелинейных процессов.

Особое внимание уделено применению уравнения Гаусса для вычисления кривизны поверхности, связанной с решением модифицированного уравнения KdV. Использование первой фундаментальной формы позволило описать метрику внутренней поверхности, что в свою очередь обеспечило возможность анализа изменения геометрии системы при различных параметрах нелинейной модели.

Полученные результаты демонстрируют связь между динамическими свойствами нелинейных волн, описываемых уравнением KdV, и геометрией соответствующих поверхностей. Такой подход расширяет возможности изучения нелинейных процессов, делая акцент на их геометрической интерпретации. Кроме того, установлены новые условия согласованности, которые могут быть полезны для дальнейшего анализа в рамках обобщённых теорий гравитации и других моделей с нелинейной динамикой.

Исследование подтверждает применимость методов дифференциальной геометрии в анализе нелинейных моделей и открывает новые перспективы для изучения связи между физическими характеристиками систем и их внутренней геометрией.

3.2 Системы Манакова для солитонных поверхностей

Системы Манакова представляют собой важный класс решений в теории солитонов, которые находят применение в дифференциальной геометрии, особенно при изучении солитонных поверхностей. Эти поверхности возникают

в результате взаимодействия нелинейных волн и описываются системами уравнений, аналогичными уравнению Манакова, которое является обобщением известного уравнения нелинейного Шредингера. Солитонные поверхности – это геометрические структуры, получаемые из солитонных решений, например, из систем Манакова. В контексте дифференциальной геометрии, такие поверхности можно ассоциировать с физическими процессами, описываемыми солитонами, например, с распространением нелинейных волн в оптических волокнах или водных каналах.

Одной из основных задач математики и физики было соединение дифференциальной геометрии и нелинейных дифференциальных уравнений. Большое значение имеет изучение частных случаев подмногообразий, кривых и поверхностей. Для построения поверхности использовалось нелинейное уравнение Шредингера. Особое внимание уделено физическому значению интегрируемых поверхностей. Солитонной поверхности такого интегрируемого дифференциального уравнения соответствует малая деформация солитонного решения. Для построения таких поверхностей теория поля, квантовая механика и гидродинамика с интегрируемыми по спину системами, связанными с поверхностью, позволяют изучать нелинейные процессы. Для определения системы Манакова, соответствующей поверхности, используют формулу Сима. В данной работе показано, как использовать нелинейное уравнение Шрёдингера для построения общего случая систем Манакова [84-86]. Формула Сима использовалась для получения интегрированных результатов по поверхности. Построена интегрируемая поверхность, соответствующая нелинейному уравнению Шредингера. Интегрируемые спиновые системы и нелинейные интегрируемые уравнения являются фундаментальными. И они очень важны в математике и физике. Некоторые из них соответствуют интегрируемым спиновым системам. Физическое значение системы Манакова велико. Примеры включают пересечения океанских волн и оптические модели с использованием эллиптических нитей. Данная статья разделена на два блока. Первый блок содержит общие сведения о системе Манакова. Также представлены система Манакова, пара и решение Лакса. Во второй части вы построите поверхность, используя двухкомпонентную систему уравнений Шрёдингера, связанную с периодической системой Манакова.

Нелинейное уравнение Шрёдингера записывается как:

$$iq_t + q_{xx} + 2|q^2|q = 0. \tag{379}$$

Нелинейные векторное уравнение Шредингера для частных случаях записывается следующем образом.

$$q_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2+|q_2|^2 q_1) = 0, \tag{380}$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2+|q_2|^2 q_2) = 0. \tag{381}$$

Рассматриваем периодическую систему Манакова таким образом:

$$q_1 = C_1\rho_1^{n1} + iC_2\rho_1^{n2}, \tag{382}$$

$$q_2 = C_1\rho_2^{m1} + iC_2\rho_2^{m2}, \tag{383}$$

где

$$\rho_s = a_s x + b_s t, \qquad s = 1{,}2. \tag{384}$$

Система Манакова интегрируется с помощью методом обратной задачи. Для системы Манакова пара Лакса пишем следующем образом.

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{385}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{386}$$

здесь

$$U = -i\lambda\Sigma + U_0, \tag{387}$$

$$V = -2i\lambda^2\Sigma + 2\lambda U_0 + V_0, \tag{389}$$

и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{390}$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -\bar{q}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{q}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{391}$$

$$V_0 = i\begin{pmatrix} (|q_1|^2+|q_2|^2 & q_{1x} & q_{2x} \\ \bar{q}_{1x} & -|q_1|^2 & -\bar{q}_1 q_2 \\ \bar{q}_{2x} & -\bar{q}_2 q_1 & -|q_2|^2 \end{pmatrix}. \tag{392}$$

Используя эти уравнения выводим пару Лакса

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & q_1 & q_2 \\ -\bar{q}_1 & i\lambda & 0 \\ -\bar{q}_2 & 0 & i\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \tag{393}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -2i\lambda^2 + i(|q_1|^2+|q_2|^2 & -2i\lambda^2 q_1 + iq_{1x} & 2\lambda^2 q_2 + iq_{2x} \\ -2i\lambda^2\overline{q_1} + i\overline{q_{1x}} & i(2\lambda^2 - i|q_1|^2) & -i\overline{q_1}q_2 \\ -2i\lambda^2\overline{q_2} + i\overline{q_{2x}} & -i\overline{q_2}q_1 & i(2\lambda^2 - |q_2|^2) \end{pmatrix}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \tag{394}$$

Решение этих уравнения ищем в следующем виде:

$$\varphi_1 = C_1 e^{i\theta_{11}} + C_1 e^{i\theta_{12}}, \tag{395}$$

$$\varphi_2 = C_1 e^{i\theta_{21}} + C_1 e^{i\theta_{22}}, \tag{396}$$

$$\varphi_3 = C_1 e^{i\theta_{31}} + C_1 e^{i\theta_{32}}. \tag{397}$$

здесь

$$\theta_j = k_j x + m_j t, \tag{398}$$

$$k_{11} = \left(-\lambda - \frac{2i}{c}\right) c_3 + c_4, \tag{399}$$

$$k_{21} = (-\lambda + ic) c_3 + c_4, \tag{400}$$

$$k_{31} = (-\lambda - ic) c_3 + c_4, \tag{401}$$

$$m_{21} = 2\lambda^2 - 2c^2 - 2\lambda ic - a_1 ic, \tag{402}$$

$$m_{11} = 2\lambda^2 - 2c^2 + 2\lambda ic - a_2 ic, \tag{403}$$

$\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$ соответствует $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ комплексному сопряжению.
Из них определяются следующие значения:

$$k_{12} = \frac{\lambda\varphi_1 + q_1\varphi_2 + q_1\varphi_2}{c_2} e^{-\theta_{12}} + \frac{\lambda c_1 c_3 - \frac{2c_1 c_{3i}}{c}}{c_2} e^{(\theta_{11} - \theta_{12})}, \tag{404}$$

$$k_{22} = \frac{-\overline{q_1}\varphi_1 + \lambda\varphi_2}{c_2} e^{-\theta_{22}} + \frac{\lambda c_1 c_3 + ic c_1 c_3}{c_2} e^{(\theta_{21} - \theta_{22})}, \tag{405}$$

$$k_{32} = \frac{-\overline{q_2}\varphi_1 + \lambda\varphi_3}{c_2} e^{-\theta_{32}} - \frac{\lambda c_1 c_3 + ic c_1 c_3}{c_2} e^{(\theta_{31} - \theta_{32})}, \tag{406}$$

и для m_{ij} получаем:

$$m_{12} = \frac{\varphi_1(2i\lambda^2 + i|q_1|^2 + i|q_2|^2 + \varphi_2(2\lambda q_1 + iq_{1x}) + \varphi_3(2\lambda q_2 + iq_{2x}) +}{c_2}$$

$$\frac{+2c_1\lambda^2 + 2c_1c^2 + 4icc_1 - a_1icc_1 - a_2icc_1}{c_2} e^{\theta_{11}-\theta_{12}}, \quad (407)$$

$$m_{22} = \frac{\varphi_1(-2i\lambda^2\bar{q}_1 + i\bar{q}_1) + i|q_2|^2 + \varphi_2(2\lambda^2 i - i|q_1|^2) +}{c_2}$$
$$\frac{+i\bar{q}_1 q_2\varphi_3 - 2c_1\lambda^2 - 2c_1c^2 - 2\lambda icc_1 + a_2icc_1}{c_2} e^{\theta_{21}-\theta_{22}}, \quad (408)$$

$$m_{32} = \frac{\varphi_1(-2i\lambda^2\bar{q}_1 + i\bar{q}_{2x}) + i|q_2|^2 q_1\varphi_3 + \varphi_3(2\lambda^2 i - i|q_2|^2) -}{c_2}$$
$$\frac{-2c_1\lambda^2 + 2c_1c^2 - 2\lambda icc_1 + a_2icc_1}{c_2} e^{\theta_{31}-\theta_{32}}, \quad (409)$$

φ функция дается в матричном виде:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\overline{\varphi_2} & -\overline{\varphi_3} \\ \varphi_2 & \overline{\varphi_1} & 0 \\ \varphi_3 & 0 & \overline{\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad (410)$$

Чтобы определить соответсвующию системе Манакова для поверхностей используем формулу Сима.

$$F = (\varphi^{-1}\varphi_\lambda)_{\lambda=0}, \quad (411)$$

где λ - спектральный параметр,

φ^{-1} – обратная матрица,

φ_λ – производные спектральных параметров,

$$\varphi_\lambda = \begin{pmatrix} \varphi_{1\lambda} & -\overline{\varphi_{2\lambda}} & -\overline{\varphi_{3\lambda}} \\ \varphi_{2\lambda} & \overline{\varphi_{1\lambda}} & 0 \\ \varphi_{3\lambda} & 0 & \overline{\varphi_{1\lambda}} \end{pmatrix}, \quad (412)$$

отсюда

$$(\varphi_1)_{\lambda=} = \left(c_1 e^{-i-4\lambda-4ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_1 + c_1c_3}{c_2}}\right) e^{\theta_{11}-\theta_{12}}, \quad (413)$$

$$(\varphi_2)_\lambda = \left(c_1 e^{-i+4\lambda+2ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_2 + c_1 - 2\bar{q}_1 + 2\varphi_2 - 4\lambda c_1 - 2icc_1}{c_2}}\right) e^{\theta_{21}-\theta_{22}}, \quad (414)$$

$$(\varphi_3)_\lambda = \left(c_1 e^{-i+4\lambda+2ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_3 - c_1 - 2\bar{q}_2 + 4i\lambda\varphi_3 - 4\lambda c_3 - 2icc_1}{c_2}}\right) e^{\theta_{31}-\theta_{32}}. \quad (415)$$

$$(\varphi_\lambda)_\lambda = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{c}_1 e^{-i-4\lambda-4ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_1 + c_1 c_3}{c_2}}\right) e^{\theta_{11}-\theta_{12}} \\ \left(\mathrm{c}_1 e^{-i+4\lambda+2ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_2 + c_1 - 2\bar{q}_1 + 2\varphi_2 - 4\lambda c_1 - 2icc_1}{c_2}}\right) e^{\theta_{21}-\theta_{22}} \\ \left(\mathrm{c}_1 e^{-i+4\lambda+2ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_3 - c_1 - 2\bar{q}_2 + 4i\lambda\varphi_3 - 4\lambda c_3 - 2icc_1}{c_2}}\right) e^{\theta_{31}-\theta_{32}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\left(\mathrm{c}_1 e^{-i+4\lambda+2ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_2 + c_1 - 2\bar{q}_1 + 2\varphi_2 - 4\lambda c_1 - 2icc_1}{c_2}}\right) e^{\theta_{21}-\theta_{22}} \\ \left(\mathrm{c}_1 e^{-i-4\lambda-4ic} + c_2 e^{\frac{i\varphi_1 + c_1 c_3}{c_2}}\right) e^{\theta_{11}-\theta_{12}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (416)$$

Приведем обратную матрицу в вид

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{det\varphi}\begin{pmatrix} \overline{\varphi_1}^2 & \overline{\varphi_1\varphi_2} & \overline{\varphi_1\varphi_3} \\ \overline{-\varphi_1}\varphi_2 & |\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2 & \overline{-\varphi_2}\varphi_3 \\ \overline{-\varphi_1}\varphi_3 & \overline{-\varphi_2}\varphi_3 & |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (417)$$

$$det\varphi = \overline{\varphi_1}(|\varphi_1|^2) + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2. \quad (418)$$

Вышеприведенная обратная матрица записывается следующем образом

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{det\varphi}\begin{pmatrix} \left((\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta}) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})}\right)^2 \\ \left(\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta}\right)(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\delta}) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ \overline{(\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta})}(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\varepsilon}) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})(\theta_{31}-\theta_{32})} \\ -\left(\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta}\right)(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\delta}) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})(\theta_{21}-\theta_{22})} \\ \left|\left(\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta}\right) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})}\right|^2 + \left|\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\varepsilon}) e^{(\theta_{31}-\theta_{32})}\right|^2 \\ (\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\delta})\overline{(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\varepsilon})} e^{(\theta_{21}-\theta_{22})(\theta_{31}-\theta_{32})} \\ -\left(\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta}\right)(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\varepsilon}) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})(\theta_{31}-\theta_{32})} \\ -(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\delta})\overline{(\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\varepsilon})} e^{(\theta_{21}-\theta_{22})(\theta_{31}-\theta_{32})} \\ \left|\left(\mathrm{c}_1 e^{\alpha} + c_2 e^{\beta}\right) e^{(\theta_{11}-\theta_{12})}\right|^2 + \left|\mathrm{c}_1 e^{\gamma} + c_2 e^{\varepsilon}) e^{(\theta_{21}-\theta_{22})}\right|^2 \end{pmatrix} \quad (419)$$

здесь

$$\alpha = -i - 4\lambda - 4ic, \quad (420)$$

$$\beta = \frac{i\varphi_1 + c_1 c_3}{c_2}, \quad (421)$$

$$\gamma = -i + 4\lambda + 2ic, \tag{422}$$

$$\delta = \frac{i\varphi_2 + c_1 - 2\bar{q}_1 + 2\varphi_2 - 4\lambda c_1 - 2icc_1}{c_2}, \tag{423}$$

$$\varepsilon = \frac{i\varphi_3 - c_1 - 2\bar{q}_2 + 4i\lambda\varphi_3 - 4\lambda c_3 - 2icc_1}{c_2}, \tag{424}$$

Теперь мы можем используя выше показанные уравнения использовать с нелинейным уравнениям Шредингера построить интегрируемую поверхностную систему Манакова:

$$F = \frac{1}{(det\varphi)_{\lambda=0}} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}. \tag{425}$$

В этой работе рассматривается связь между интегрируемой системой и солитонными поверхностями так же показано использование нелинейного уравнения Шредингера чтобы построить частые случаи для систему Манакова. Воспользовались формулой Сима для получения результатов для интегрируемых поверхностей. Соответствующие нелинейные уравнения Шредингера построили интегрируемую поверхность.

3.3 Геометрия солитона с использованием представление Лакса для изомонодромной деформации

Физические процессы описываются с помощью математических моделей. Многие из них не являются-линейный по своей природе. По этой причине теория нелинейной среды актуальна и очень обширна. С математической точки зрения предметом физики нелинейных явлений являются системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, которые имеют частные решения - солитоны. Бегущая волна, которая быстро убывает на бесконечности, называется уединенной волной или солитоном. Теория солитонов имеет много фундаментальных методов для детального анализа процессов. Одним из таких методов является геометрическая интерпретация физического процесса.

Эта работа посвящена изучению пары Лакса изомонодромной деформации. Условие изомонодромии эквивалентно существованию совместимой пары линейных уравнений, пары Лакса. В этой паре одно из уравнений подвергается деформации, а другое описывает деформацию. Изомонодромная деформация - это теория изомонодромии (то есть сохранения монодромии) деформации обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод был использован для получения выражений для координатного угла.

Доказано, что деформация системы является изомонодромной тогда и только тогда, когда первая и вторая фундаментальные формы, определяющие эту деформацию, удовлетворяют условию интегрируемости. Показано, что аналогично площадь поверхности солитона представляется в виде полуседловидного графа.

Метод изомонодромных деформаций появился в современной науке в работах Джимбо Мива-Сато и Флашки-Ньюэла и с тех пор активно используется и развивается [87, 88]. Они рассматривали системы общего положения, то есть системы, в которых все нерегулярные особые точки нерезонансны. Построение поверхности изомонодромных деформаций стало возможным во многом после доказательства нескольких теорем о свойствах систем линейных дифференциальных уравнений. Метод изомонодромных деформаций используется для изучения нелинейных уравнений, его идея заключается в реализации нелинейного уравнения как изомонодромного состояния определенной системы, и эта интерпретация предоставляет существенную информацию о нелинейном уравнении [89, 90]. Под поверхностью мы рассматриваем множество Σ от A(x,y,z), где x y t, координаты определены следующим образом:

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), \tag{426}$$

В трехмерном евклидовом пространстве E^3 поверхность представлена с помощью вектора положения $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, определяется:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \varphi(u,v)\vec{\imath} + \psi(u,v)\vec{\jmath} + \chi(u,v)\vec{k}, \tag{427}$$

где $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ являются единичными векторами, направленными вдоль осей декартовой системы координат. Рассматривая изомонодромные уравнения, мы можем описать их как деформации интегрируемых уравнений. Пара Лакса:

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{428}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{429}$$

где U, V

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} -2\lambda^2 - vu & 2\lambda v + v_x \\ -\lambda u + u_x & 2\lambda^2 + uv \end{pmatrix}. \tag{430}$$

Далее мы будем иметь дело с трехмерным пространством. Стандартные координаты точек в этом пространстве будут обозначаться x, y, t . Чтобы найти внутреннюю геометрию поверхности нам нужно найти первую фундаментальную форму, т.е. квадрат вектора дифференциального вектора положения [91-94]:

$$I = d\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2, \tag{431}$$

$$I = \vec{r}_u du^2 + 2(\vec{r}_u, \vec{r}_v) dudv + \vec{r}_v dv^2. \tag{432}$$

На поверхности Σ в каждой точке показана квадратная форма касательной к дифференциалам *du* и *dv*. Для первой фундаментальной формы мы используем следующие обозначения:

$$\vec{r}_u^2 = E;\ \vec{r}_v^2 = G;\ (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = F. \tag{433}$$

В этом случае, используя, мы получаем следующее

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{434}$$

находим первую фундаментальную форму

$$\vec{r}_u^2 = -\frac{1}{2} trace(\vec{r}_u^2);\ \vec{r}_v^2 = -\frac{1}{2} trace(\vec{r}_v^2);\ \vec{r}_{uv} = -\frac{1}{2} trace((\vec{r}_u, \vec{r}_v), \tag{435}$$

$$\vec{r}_u^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{436}$$

$$\vec{r}_v^2 = \begin{pmatrix} 16\lambda^2 - 4vu & 0 \\ 0 & 16\lambda^2 - 4vu \end{pmatrix}, \tag{437}$$

$$\vec{r}_{uv} = \begin{pmatrix} -4\lambda^2 & 2v \\ 2u & -4\lambda \end{pmatrix}, \tag{438}$$

$$E = -1, \tag{439}$$

$$F = 16\lambda^2 - 4uv, \tag{440}$$

$$G = 4\lambda, \tag{441}$$

Мы получили вычисления первого фундаментального вида

$$I = -du^2 + 2(16\lambda^2 - 4uv)dudv + 4\lambda dv, \tag{442}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv;\ \ \delta\vec{r} = \vec{\delta}_u \delta u + \vec{\delta}_v \delta v, \tag{443}$$

тогда желаемый угол будет определен по формуле (450):

$$cos\omega = \frac{d\vec{r}, \delta\vec{r}}{\sqrt{d\vec{r}^2}, \sqrt{\delta\vec{r}^2}}, \tag{444}$$

используя (14) и (15), тогда выражения будут следующим:

$$cos\omega = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}, \qquad (445)$$

из мы можем получить выражения для координатного угла

$$du \neq 0, \quad dv = 0, \qquad \delta u = 0, \quad \delta v \neq 0, \qquad (446)$$

$$cos \ \ \omega = \frac{Fdu\delta v}{\sqrt{Edu^2}\sqrt{G\delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{16\lambda^2 - 4uv}{\sqrt{-4\lambda}}, \qquad (447)$$

Перекрестное произведение, как известно, по модулю равно площади параллелограмма, построенного по векторам сомножителей, который, в свою очередь, равен произведению их модулей на синус угла между ними (взятого положительно). В этом случае мы получаем выражение для синуса угла между координатными линиями в заданной точке:

$$sin \ \ \omega = \sqrt{1 - cos^2 \ \ \omega} = \sqrt{1 - \frac{EG - F^2}{EG}} = \sqrt{\frac{-4\lambda - (16\lambda^2 - 4uv)^2}{-4\lambda}}. \qquad (448)$$

Основным вопросом в локальной теории поверхностей является кривизна поверхности, то есть природа ее отличия от плоскости. Оказывается, этот вопрос делится на две части: внутреннюю, касающуюся геометрии поверхности и выраженную в терминах ее метрики, т.е. первых квадратичных форм, и внешнюю, касающуюся ее местоположения в пространстве, которое является еще одной дифференциальной формой. Форма фигур в пространстве - понятие относительное, связанное с выбором группы преобразований пространства [95-97]. В качестве основной группы мы берем группу перемещений аффинного пространства - преобразований, сохраняющих расстояние. Мы видели, что для кривой в пространстве ее форма полностью определяется двумя функциями – функциями кривизны и кручения. Для поверхностей справедлив аналогичный факт: форма поверхности определяется двумя квадратичными формами. К каждой точке поверхности Σ в дополнение к единичному вектору нормали $\vec{n}$.

К каждой точке поверхности $\sum$ в дополнение к единичному вектору нормали:

$$n = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}}{4\sqrt{uv}}, \qquad (449)$$

Мы определяем второй дифференциал радиус-вектора:

$$d^2r = \vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v. \quad (450)$$

Вторая фундаментальная форма, называемая поверхностью $\sum$, называется скалярным произведением векторов и d^2r и $\vec{n}$:

$$II = (d^2\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_{uu}, \vec{n})du^2 + 2(\vec{r}_{uv}, \vec{n})dudv + (\vec{r}_{vv}, \vec{n})dv^2. \quad (451)$$

Для коэффициентов второй фундаментальной формы принято обозначение

$$e = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}), \quad g = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), \quad f = (\vec{r}_{vv}, \vec{n}). \quad (452)$$

используя, мы можем переписать вторую фундаментальную форму таким образом

$$\mathrm{II} = \mathrm{edu}^2 + 2\mathrm{fdudv} + \mathrm{gdv}^2 \quad (453)$$

где

$$e = \frac{2uv}{\sqrt{uv}}, \quad (454)$$

$$f = \frac{8\lambda^2 uv + 4u^2v^2 + 4\lambda u_x v - 4\lambda u v_x}{\sqrt{uv}}, \quad (455)$$

$$g = \frac{4\lambda uv - u_x v + u v_x}{\sqrt{uv}}. \quad (456)$$

подставив в, мы, таким образом, получили прямоугольник квадратичных форм на поверхности. Обратите внимание, что его коэффициенты являются скалярными произведениями производных радиус-вектора и вектора нормали поверхности в данной точке

$$II = \frac{2uv}{\sqrt{uv}}du^2 + 2\frac{8\lambda^2 uv + 4u^2v^2 + 4\lambda u_x v - 4\lambda u v_x}{\sqrt{uv}}dudv + \\ + \frac{4\lambda uv - u_x v + u v_x}{\sqrt{uv}}dv^2. \quad (457)$$

Вторая квадратичная форма предоставляет информацию о геометрических свойствах поверхности, в первую очередь о ее пространственной форме. Физический смысл второй фундаментальной формы — это кратчайшее расстояние от другой точки до касательной, проведенной к первой точке.

Средняя кривизна называется полусуммой (иногда суммой) основных кривизн H.

$$H = \frac{-\left((8(\lambda uv + 4\left(-\lambda u - u^2 v(4\lambda^2 - uv) + u(8\lambda^4 - 2\lambda^2 uv)\right)\right)}{8\sqrt{uv}(\lambda - 4\lambda^2 + uv)} +$$

$$+ \frac{v(1 + 128\lambda^3 - 32\lambda uv)u_x - u(1 + 128\lambda^3 - 32uv)v_x}{8\sqrt{uv}(\lambda - 4\lambda^2 + uv)}. \qquad (458)$$

Гауссова (или полная) кривизна (или просто кривизна) является произведением основных кривизн K

$$K = \frac{(8v(-4\lambda^2 uv + u^2 v(2\lambda^2 + uv)^2) + 8\lambda^2 v^2 u_x^2 -}{2uv(\lambda + 64\lambda - 32\lambda^2 uv + 4vu^2)} +$$

$$u\left(uv + 16\lambda uv(2\lambda + uv)\right)v8\lambda^2 u^2 v_x^2 +$$
$$+ \frac{vu_x(uv + 16\lambda uv(2\lambda^2 + uv) - 16\lambda^2 uv_x)}{2uv(\lambda + 64\lambda - 32\lambda^2 uv + 4vu^2)}. \qquad (459)$$

здесь указана средняя кривизна, K - гауссова кривизна поверхности в данной точке. В дополнение к длинам и углам, метрика позволяет вычислять площади. Касательные векторы, которые мы приняли за стороны параллелограмма в любой из вершин разбиения. Можно видеть, что сумма полных квадратов этих выражений является интегральной суммой для двойного интеграла, взятого по области, в которой определен диффеоморфизм локального отображения. Этот факт будет положен в основу определения. Итак, площадь участков поверхности определяется по:

$$S = \iint EG - F^2 = \iint \sqrt{-4\lambda - (-16\lambda^2 - 4uv)^2}\, dudv. \qquad (460)$$

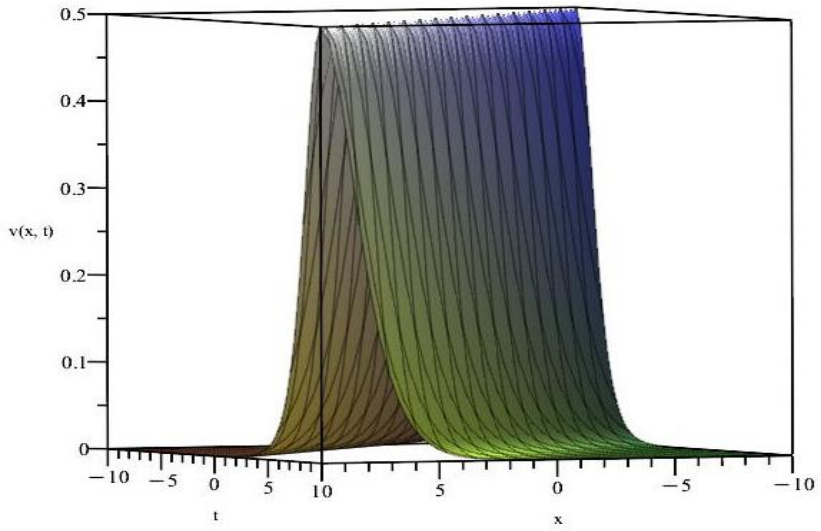


Рисунок 8 – Солитонная поверхность для изомонодромной деформации

На представленном рисунок 8 изображено решения v(x.t) в зависимости от времени t и пространственной координаты x. Которая показывает характерную для солитонов локализованную структуру сохраняя свою форму при распространении во времени.

Была рассмотрена геометрия солитона с использованием представления Лакса для задачи изомонодромной деформации. Основным результатом стало определение фундаментальных характеристик солитонных решений. Были вычислены первая и вторая фундаментальные формы, которые описывают внутреннюю геометрию и форму солитона, не зависящую от его положения в пространстве. Кроме того, были найдены значения гауссовой и средней кривизны, что позволило уточнить основные геометрические свойства поверхности. Также были определены координатные углы, описывающие форму поверхности.

Выводы по третьему разделу

В этой главе мы изучали сложное модифицированное уравнение Кортевега−де Фриза (cmKdV). Используя первую фундаментальную форму, нашли геометрию внутренней поверхности, используя уравнение Гаусса.

Мы рассматривали связь между интегрируемой системой и солитонными поверхностями так же показано использование нелинейного уравнения Шредингера чтобы построить частые случаи для системы Манакова. Чтобы определить соответсвующию системе Манакова для поверхностей используем формулу Сима. Воспользовались формулой Сима для получения результатов для интегрируемых поверхностей. Соответствующие нелинейные уравнения Шредингера построили интегрируемую поверхность.

Также работа была посвящена изучению пары Лакса изомонодромной деформации. Условие изомонодромии эквивалентно существованию совместимой пары линейных уравнений, пары Лакса. В результате работы были найдены гауссова кривизна и средняя кривизна. Наиболее важным результатом здесь является первая и вторая фундаментальные формы.Использование изомонодромной деформации позволило связать свойства солитонных решений с интегрируемыми структурами, что делает данный метод универсальным для анализа нелинейных моделей. Результаты работы имеют не только теоретическое значение, но и могут быть применены в различных физических системах, где наблюдаются нелинейные волновые процессы, таких как плазма, гравитационные поля или оптические системы. В дальнейшем данный подход может быть использован для изучения взаимодействий между солитонами, влияния внешних возмущений на их структуру или поиска новых типов решений в более сложных моделях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации содержатся новые, научно обоснованные теоретические результаты, являющиеся итогом достижения основной цели и решения поставленных задач.

Для математиков, физиков и других специалистов в области науки, такое понятие как многообразие является фундаментальным и широко распространенным. Данное абстрактное математическое понятие является обобщением для описания многообразия, которое представляет собой непрерывное пространство определенного размера.

Многообразия могут быть конечномерными или бесконечномерными, компактными или неограниченными, но они всегда имеют локальную структуру, подобную обычному евклидову пространству.

В этой диссертационной работе используются методы дифференциальной геометрии для построения и исследования уравнения Монжа-Ампера. Полученное решение апробируется при исследовании ускоренной космологической модели с использованием стандартных для космологии методов теоретической физики.

По результатам диссертационной работы можно сделать следующие выводы:

– было показано, что лагранжиан обобщенной модели гравитации описывается решением уравнения Монжа-Ампера;

– при рассмотрении обобщенной модели со скалярным полем, включающим F(R), F(T) и F(Q) гравитацию как по отдельности, так и в обобщённом виде при использовании метода симметрии Нетер можно получить решение Старобинского;

– если космологическая модель включает в себя k-эссенцию, инфляционная модель Вселенной является необходимым следствием наличия симметрии;

– была найдена представление Лакса для нелинейного уравнения Монжа-Ампера. Внутренняя геометрия была исследована путем вычисления угла между двумя пересекающимися линиями на поверхности, вычисления площади части поверхности и нахождения кратчайших линий на поверхности.

Эти новые решение можно использовать во многих областях физики: теории гравитации, метеорология, физика твердого тела и др. В частности, геометрические объекты, связанные с поверхностью солитона, можно определить путем решения космологических задач.

Благодарности

Выражаю искренне благодарность своему научному руководителю Р. Мырзакулову д.ф.-м.н., академику НАН РК за постановку задачи, руководство и всестороннюю поддержку в период выполнения данной работы. Также выражаю огромную благодарность своему зарубежному консультанту профессору Дугласу Синглетону за плодотворную совместную работу и консультации во время моего визита в Департамент физики Калифорнийского государственного университета (Фресно, США). Также выражаю благодарность сотрудникам Евразийского международного центра теоретической физики и кафедры Общая и теоретическая физика за полезные обсуждения, помощь и за создание отличной рабочей атмосферы при выполнении данной диссертационной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae // Astroph. J. – 1999. – Vol. 517. – P. 565-586.

2 Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astron. J. – 1988. – Vol. 116, Issue 3. – P. 1009-1038.

3 Copeland E., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // Int. J. Mod. Phys. D. – 2006. – Vol. 15. – P. 1753-1935.

4 De Putter R., Linder E.V. Kinetic k-essence and Quintessence // Astropart. Phys. – 2007. – Vol. 28. – P. 263-272.

5 Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. k-Inflation // Phys. Lett. B. – 1999. – Vol. 458. – P. 209-218.

6 Myrzakulov R., Yerzhanov K., Yesmakhanova K. et al. g-Essence as the cosmic speed-up // Astrophys. Space Sci. – 2012. – Vol. 341. – P. 681-688.

7 Bamba K., Myrzakulov R., Razina O. et al. Cosmological evolution of equation of state for dark energy in G-essence models // Int. J. Mod. Phys. D. – 2013. – Vol. 22. – P. 1350023.

8 Tsyba P.Y., Razina O.V., Suikimbayeva N. Analysis cosmological tachyon and fermion model and observation data constraints // Int. J. Mod. Phys. D. – 2021. – Vol. 30, Issue 15. – P. 2150114.

9 Myrzakulov R. Accelerating universe from F(T) gravity // Eur. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71. – P. 1752-1-1752-13.

10 Myrzakulov R. Dark Energy in F(R, T) Gravity // https://www.researchgate.net/publication/292994401_Dark_Energy_in. 10.05.2024.

11 Myrzakulov R. FRW Cosmology in F(R, T) gravity // Eur. Phys. J. C. – 2012. – Vol. 72, Issue 11. – P. 1-15.

12 Sharif M. et al. Analysis of F(R, T) gravity models through energy conditions // Eur. Phys. J. Plus. – 2013. – Vol. 128. – P. 123-1-123-18.

13 Pasqua A., Chattopadhyay S., Myrzakulov R. A dark energy with higher order derivatives of H in the modified gravity f (R, T) // ISRN High Energy Phys. – 2014. – Vol. 2014. – P. 535010.

14 Capozziello S., De Laurentis M., Myrzakulov R. Noether Symmetry Approach for teleparallel-curvature cosmology // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2015. – Vol. 12. – P. 1550095-1-1550095-10.

15 Myrzakulov R. F(T) gravity and k-essence // Gen. Relativ. Gravit. – 2012. – Vol. 44. – P. 3059-3080.

16 Gudekli E., Myrzakulov N., Yerzhanov K. et al. Trace-anomaly driven inflation in f (T) gravity with a cosmological constant // Astrophys. Space Sci. – 2015. – Vol. 357. – P. 45.

17 Gakis V., Krssak M., Said J.L. et al. Conformal Gravity and Transformations in the Symmetric Teleparallel Framework // Phys. Rev. D 2020. – Vol. 101. – P. 064024.

18 Fotios A.K., Spyros B., Saridakis E.N. Observational constraints on Myrzakulov gravity // Phys. Rev. D. – 2020. – Vol. 103. – P. 104013.

19 Saridakis E.N., Myrzakul S.N., Myrzakulov K. et al. Cosmological applications of F(R,T) gravity with dynamical curvature and torsion // Phys. Rev. D. – 2020. – Vol. 102. – P. 023525.

20 Capozziello S., de Ritis R., Rubano C. et al. Noether symmetries in cosmology // Riv. Nuovo Cimento. – 1996. – Vol. 19. – P. 1-114.

21 Massaeli E., Motaharfar M., Sepangi H.R. General scalar-tensor cosmology: Analytical solu-tions via noether symmetry // Eur. Phys. J. C. – 2017. – Vol. 77. – P. 124.

22 Sahlu S., Ntahompagaze J., Abebe A. et al. Scalar perturbations in f(T) gravity using the 1+3 covariant approach // Eur. Phys. J. C. – 2020. – Vol. 80. – P. 422.

23 Darabi F., Asgharinya S. f(R) scalar-tensor cosmology by Noether symmetry // Chin. J. Phys. – 2015. – Vol. 53. – P. 040101.

24 Fu G.Z., Xing C.C., Na W. The Scattering of Dirac Spinors in Rotating Spheroids // Eur. Phys. J. C. – 2020. – Vol. 80. – P. 582-1-582-12.

25 Gao Z.F., Song D.L., Li X.D. et al. The equilibrium equations of Bos-on-Fermi systems in the Newtonian approximation // Astron. Nachr. – 2019. – Vol. 340. – P. 241-246.

26 Keskin A.I., Sirnak U. Inflation and dark energy in f (R, X, f) gravity // Mod. Phys. Lett. A. – 2018. – Vol. 33. – P. 1850215.

27 Shahalam M., Sharma M., Wu Q. et al. Pre-inflationary dynamics in loop quantum cosmology: Power-law potentials // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 96. – P. 123533.

28 Shahalam M., Sami M., Wang, A. Preinflationary dynamics of a-attractor in loop quantum cosmology // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 98. – P. 043524.

29 Shahalam, M. Preinflationary dynamics of power-law potential in loop quantum cosmology // Universe. – 2018. – Vol. 4. – P. 87-1-87-8.

30 Sharma M. et al. Preinflationary dynamics in loop quantum cos-mology: Monodromy Potential // JCAP. – 2018. – Vol. 11. – P. 003-1-003-21.

31 Almeida, C.R.; Fabris, J.C.; Sbisá, F.; Tavakoli, Y. Quantum cosmology with k-Essence theory // Physical and Mathematical Aspects of Symmetries: proceed. of the 24th internat. colloq. on Group Theoretical Methods in Physics. – Paris, 2017. – P. 171-176.

32 Tsamparlis M., Paliathanasis A. Two dimensional dynamical systems which admit Lie and Noether symmetries // J. Phys. A Math. Theor. – 2011. – Vol. 44. – P. 175202.

33 Monge G. Sur le calcul integral des equations aux differences partielles // In book: Memoires de l'Academie des Sciences. – Paris, 1784. – P. 118-192.

34 Ampere A.M. Mémoire contenant l'application de la théorie exposée dans le XVII. e Cahier du Journal de l'École polytechnique, à l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre. – Paris, 1819. – 188 p.

35 Minkowski H. Allgemeine Lehrsatze uber die konvexen Polyeder. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen. – 1897. – Vol. 1897. – P. 198-220.

36 Minkowski H. Volumen und Oberflache // Mathematische Annalen. – 1903. – Vol. 57. – P. 447-495.

37 Figalli A. The Monge-Ampère Equation and Its Applications, Zurich Lectures in Advanced Mathematics. – Helsinki, 2017. – 210 p.

38 Figalli A. On the Monge-Ampère Equation // Procced. sémin. Bourbaki, 70e année, 2017–2018. – Paris, 2018. – P. 477-504.

39 Ablowitz M.J., Segur H. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. – London, 1991. – 516 p.

40 Alexandrov A.D. Dirichlet's problem for the equation I // Vestnik Leningrad University. Mathematics. – 1958. – Vol. 13, Issue 1. – P. 5-24.

41 Bakelman I.Y. Generalized solutions of Monge-Ampere equations // Dokl. SA USSR (N.S.). – 1957. – Vol. 114. – P. 1143-1145.

42 Sym A., Ragnisco O., Levi D. et al. Soliton Surfaces: VII. Relativistic String in External Field: General Integral and Particular Solutions // Lettere al Nuovo Cimento. – 1985. – Vol. 44. – P. 529-536.

43 Yang Q., Zhang H. On the exact soliton solutions of fifth-order Korteweg-de Vries equation for surface gravity waves // Results in Physics. – 2021. – Vol. 26. – P. 104424.

44 Mittal A., Balyan L. Numerical solutions and stability analysis for solitary waves of complex modified Korteweg-de Vries equation using Chebyshev pseudospectral methods // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2020. – Vol. 36, Issue 6. – P. 1662-1681.

45 Lindsey M., Rubinstein Y.A. Optimal Transport via a Monge--Ampère Optimization Problem // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2017. – Vol. 49, Issue 4. – P. 3073-3124.

46 Tseluiko D. Minimal Surfaces PDE as a Monge–Ampere Type Equation // Balkan J of Geometry and Its Applications. – 2002. – Vol. 7, Issue 1. – P. 113-120.

47 Brunelli J.C., Gurses M., Zheltukhin K. On the integrability of a class of Monge-Ampere equations // Reviews in Mathematical Physics. – 2001. – Vol. 13. – P. 529-543.

48 Crasmareanu M., Pişcoran L.-I. Wick–Tzitzeica solitons and their Monge–Ampér equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2018. – Vol. 15, Issue 05. – P. 1850082-1-1850082-9.

49 Yerzhanov K., Bauyrzhan G., Altaibayeva A. et al. Inflation from the Symmetry of the Generalized Cosmological Model // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, Issue 12. – P. 2254-1-2254-11.

50 Saridakis E.N., Myrzakul S., Myrzakulov K. et al. Cosmological applications of F(R, T) gravity with dynamical curvature and torsion // Phys. Rev. D. – 2020. – Vol. 102. – P. 023525.

51 Myrzakulov R., Yerzhanov K., Bauyrzhan G. Noether symmetry approach for F(R,T,X,/phi) cosmology // Procced. 1st Hermann-Minkowski meeting on the foundations of spacetime physics. – Albena, 2017. – P. 107-116.

52 Bamba K., Razina O., Yerzhanov K. et al. Cosmological Evolution of Equation of State for Dark Energy in g-essence Models // International Journal of Modern Physics D. – 2013. – Vol. 22. – P. 1350023.

53 Razina O., Tsyba P., Meirbekov B. et al. Cosmological Einstein-Maxwell model with g-essence // International Journal of Modern Physics D. – 2019. –Vol. 28. – P. 1950126.

54 Razina O., Tsyba P., Sagidullayeva Z. Power solution of the f(R)-gravity with Maxwell term and g-essence // Bulletin of the Karaganda University. Physics. – 2019. – Vol. 1. – P. 94-102.

55 Sym A. Soliton surfaces // Lett. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. – 1982. – Vol. 33. – P. 394-400.

56 Sebastian B., Kazuharu B., Ugur C. New exact spherically symmetric solutions in f(R,ϕ,X) gravity by Noether's symmetry approach

57 // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Volume 2019, N 02, 016

58 Sym A. Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems) // Geometrical Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems: proceed. of the 6th Scheveningen conf. – Scheveningen, 1985. – P. 154-231.

59 Fokas A.S., Gelfand I.M. Surfaces on Lie Groups, on Lie Algebras, and Their Integrability // Commun. Math. Phys. – 1996. – Vol. 177. – P. 203-220.

60 Fokas A.S., Gelfand I.M., Finkel F. et al. A formula for constructing infinitely many surfaces on Lie algebras and integrable equations // Selecta Math., New Ser. – 2000. – Vol. 6. – P. 347-375.

61 Yesmakhanova K., Bekova G., Shaikhova G. Travelling wave solutions for the two-dimensional Hirota system of equations // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020039.

62 Yesmakhanova K., Bekova G., Ybyraiymova S. et al. Conservation laws of the Hirota-Maxwell-Bloch system and its reductions // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 936. – P. 012098.

63 Bekova G., Yesmakhanova K., Ozat N. et al. Dark and bright solitons for the two-dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch system with time-dependent coefficient // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 965. – P. 012035.

64 Myrzakulov R., Bekova G., Yesmakhanova K. et al. Exact solutions for the (2+1)-dimensional Hirota Maxwell-Bloch system // AIP Conf. Proc. – 2017. – Vol. 1880. – P. 060022.

65 Cieslinski J. The Darboux-Bianchi-Backlund transformation and soliton surfaces // Proceed. of 1st Non Orthodox School on Nonlinearity and Geometry. –1998. – P. 81-107.

66 Yesmakhanova K., Bekova G., Myrzakulov R. et al. Lax representation and soliton solutions for the (2+1) -dimensional two-component complex modified

Korteweg-de Vries equations // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 804. – P. 012004.

67 Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. et al. Darboux transformation and soliton solution for the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries equations // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 936. – P. 012045.

68 He J., Wang L., Li L. et al. Few-cycle optical rogue waves: Complex modified Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 89. – P. 062917.

69 Chen J., Chen Y., Feng B.F. et al. General high-order rogue waves of the (1+1)-dimensional yajima-oikawa system // The Physical Society of Japan. – 2018. – Vol. 9. – P. 094007.

70 Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and a New Type of Long Stationary Waves // Phil. Mag. – 1895. – Vol. 39. – P. 422-443.

71 Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States // Phys. Rev. Lett. – 1965. – Vol. 15. – P. 240-243.

72 Tek S. Modified Korteweg-de Vries Surfaces // J Math. Phys. – 2007. – Vol. – 48. – P. 013505.

73 Zhidkov E.P., Iliev I.D., Kirchev K.P. Stability of a solution of the form of a solitary wave for a nonlinear complex modied Korteweg-de Vries equation // Sib. Mat. Zh. – 1985. – Vol. 26. – P. 810-817.

74 Chalifour. V. Minimal surfaces associated with orthogonal polynomials // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2020. Vol. 27. – P. 529-549.

75 Nakayama K. Motion of Curves in Hyperbolid in the Minkowski Spac// J. Phys.Soc. – 1998. – Vol. 67. – P. 3031-3037.

76 Sym A. Soliton Surfaces II. Geometric Unification of Solvable Nonlinearities // Lett. Nuovo Cim. – 1983. – Vol. 36. – P. 307-312.

77 Sym A. Soliton Surfaces III. Solvable nonlinearities with trivial geometry // Lett. Nuovo Cim. – 1984. – Vol. 39. – P. 193-196.

78 Sym A. Soliton Surfaces IV. Topological Charge for Nontopological Solitons // Lett. Nuovo Cim. – 1984. – Vol. 40. – P. 225-231.

79 Zakharov V.E., Shabat A.B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media // Sov. Phys. JETP. – 1972. – Vol. 34. – P. 62-69.

80 Gurses M., and Tek S. Korteweg-de Vries Surfaces // Nonlinear Analysis: Theory, Method and Applications. – 2014. – Vol. 95. – P. 11-22.

81 Yang G.G., Li L., Jia S.T. Peregrine rogue waves induced by the interaction between a continuous wave and a soliton // Phys. Rev.E. – 2012. – Vol. 85. – P. 046608.

82 Gurses M. Some Special Integrable Surfaces // Nonlinear Mathematical Physics. – 2022. – Vol. 9. – P. 2251-2270.

83 Tek S. Some classes of surfaces in R3 and M3 arising from soliton theory and a variational principle // Discrete and Continuous Dynamical System Supplemen – 2009. – Vol. – 2009. – P. 761-770.

84 O. Ceyhan., A.S. Fokas., and M. Gurses. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss–Mainardi–Codazzi equations // Mathematical Physics. – 2000. – Vol. 41. – P. 59-66.

85 Myrzakul A. Integrability of two coupled curves and geometrically equivalent spin analogue of the Manakov equation // Vestnik ENU. – 2006. – Vol. 2. – P. 95-99.

86 Myrzakul A. Equivalence between the coupled M-LIII equation and the Γ - spin system // Vestnik ENU. – 2006. – Vol. 3. – P. 1750136.

87 Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation // Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. – Vol. 14. – P. 1750136.

88 Jimbo M., Miwa T., Sato M. Holonomic quantum fields II // Publ. RIMS. – 1979. – Vol. 15. – P. 201-278.

89 Flashka H., Newell A.C. Monodromy and spectrum preserving deformations // Comm. Math. Phys. – 1980. – Vol. 76. – P. 67-116.

90 Bolibruch A. On Isomonodromic Deformations of Fuchsian Systems // J. Dynam. Control Systems. – 1997. – Vol. 3. – P. 589-604.

91 Mahoux G. Introduction to the Theoryof Isomonodromic Deformations of Linear OrdinaryDifferential Equations with Rational Coefficients // In book: The Painlev´e Property: One Century Later. – NY.: Springer, 1999. – P. 35-76.

92 Bauyrzhan G., Yesmakhanova K., Yerzhanov K. et al. Soliton surfaces for complex modified Korteweg-de Vries equation // Procced. conf. 8th internat. on Mathematical Modeling in Physical Sciences (ICMSQUARE). – Bratislava, 2019. – P. 1-9.

93 Meirambay A., Yerzhanov K.K. Solution of the deformed Schwarzschild metric by the Yang-Baxter equation // Bulletin of the University of Karaganda. Physics. – 2019. – Vol.4. – P. 8-14.

94 Sergazina A., Yesmakhanova K., Yerzhanov K. et al. Darboux Transformation for the (1+1)-dimensional Nonlocal Focusing Nonlinear Schrodinger Equation // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series Physico-Mathematical. – 2017. – Vol.6 . – P. 14-21.

95 Fokas A.S., Ablowitz M.J. On the initial value problem of the second Painlevé Transcendent // Comm. Math. Phys. – 1983. – Vol. 91. – P. 381-403.

96 Flaschka H., Newell A.C. Monodromy- and spectrum-preserving deformations I // Commun. Math. Phys. – 1980. – Vol. 76. – P. 65-116.

97 Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III // Physica D. – 1981. – Vol. 4. – P. 26-46.